Examen 09 mai 2016 - Documents non autorisés.
Durée 3 heures.

1. **Algèbre linéaire:**
Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$ suivante

$$A = Id + \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

où h est un réel et Id la matrice identité de $\mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice A est définie positive.

2. **Eléments finis:**

   - Le triplet $([0,1], \mathbb{P}_1, \{p \to p(0), p \to p(1/2)\})$ est-il un élément fini?
   - Le triplet $([0,1], \mathbb{P}_2, \{p \to p(0), p \to p(1), p \to p(1/2)\})$ est-il un élément fini?

3. **Problème elliptique:**
Soit f une fonction donnée de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $f \in L^2([0,1],\mathbb{R})$. On considère le problème variationnel suivant

$$\int_0^1 u_2(x)v(x) - u_1(x)w(x)\,dx + \int_0^1 u_1'(x)v'(x) + u_2'(x)w'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \qquad (1)$$
$$\forall v \in H_D^1(0,1), \quad \forall w \in H_D^1(0,1),$$

où $H_D^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1), v(0) = 0\}$.

   (a) Justifier rigoureusement pourquoi le problème (1) admet une unique solution dans $(H_D^1(0,1))^2$.

   (b) Ecrire le système différentiel vérifié par la solution (u_1, u_2) de (1), sans oublier de préciser les conditions limites.

4. **Approximation Elément fini:**
On propose d'approcher la formulation (1) par une méthode élément fini $\mathbb{P}_2$.

   (a) On se donne une discrétisation uniforme du segment $[0,1]$, $x_i = i\,h$, pour $1 \le i \le N$, avec $h = \frac{1}{N}$. On note de plus $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\,h$. Proposer une approximation conforme de l'espace $H_D^1(0,1)$ basée sur une méthode élément fini $\mathbb{P}_2$. On note V_h cet espace.

(b) On note ϕ_i $(1 \leq i \leq N)$ un élément de V_h tel que $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ et $\phi_i(x_{j-\frac{1}{2}}) = 0$, $(1 \leq j \leq N)$. On note ψ_i $(1 \leq i \leq N)$ un élément de V_h tel que $\psi_i(x_{j-\frac{1}{2}}) = \delta_{ij}$ et $\psi_i(x_j) = 0$, $(1 \leq j \leq N)$.
Proposer, en le justifiant, une base de V_h et donner sa dimension.

(c) Justifier que l'approximation proposée induit une unique solution approchée (u_1^h, u_2^h) et donner un résultat d'estimation d'erreur entre (u_1, u_2) et (u_1^h, u_2^h).

(d) Calculer la matrice élémentaire associée à l'intégrale: $\int_0^1 u_1'(x)v'(x)\,dx$.

(e) Proposer la construction d'un système linéaire permettant de trouver (u_1^h, u_2^h).

(f) Donner les propriétés de la matrice du système linéaire obtenu.

5. **Problème parabolique:**
On considère le problème d'évolution suivant ,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \partial_t u_1(t,x)v(x) + \partial_t u_2(t,x)w(x) + u_2(t,x)v(x) - u_1(t,x)w(x)\,dx \\
&+ \int_0^1 u_1'(t,x)v'(x) + u_2'(t,x)w'(x)\,dx = 0, \\
&\quad \forall v \in H_D^1(0,1), \quad \forall w \in H_D^1(0,1), \quad pp.\ t > 0 \\
&u_1(0,x) = a(x), \quad u_2(0,x) = b(x).
\end{aligned}$$

(a) Proposer la discrétisation en temps Euler implicite de cette équation avec un pas de temps noté δt. On notera $(U_1^n, U_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite générée.

(b) En s'inspirant de l'exercice 3, montrer que la suite $(U_1^n, U_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(c) Montrer que la suite de fonctions $(U_1^n, U_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^2(0,1)$.

(d) On munit $L^2(0,1)$ de la norme $\|.\|$. Donner une borne pour la quantité

$$\delta t \sum_{n=1}^{M-1} \|\partial_x U_1^n\|^2 + \|\partial_x U_2^n\|^2.$$

(e) On considère de plus une discrétisation en espace par la méthode élément fini $\mathbb{P}_2$ proposée à l'exercice 3. On note $(Uh_1^n, Uh_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs ainsi construite. Etendre les bornes obtenues précédemment à la suite $(Uh_1^n, Uh_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(f) Ecrire en langage matlab/scilab l'algorithme de résolution de ce problème d'évolution (discrétisation implicite en temps et élément fini $\mathbb{P}_2$ en espace).