**Examen de Calcul Scientifique et Optimisation , janvier 2011**
Cours non autorisé

## Problème

Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ de bord $\partial\Omega$.
On fixe $f \in (L^2(\Omega))^3$, $\lambda \in L^2(\Omega)$, $\rho > 0$. Pour $u \in (H^1(\Omega))^3$, on pose :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho |u|^2 + |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega f \cdot u \, dx. \tag{1}$$

Dans tout le problème, on note $K$ l'ensemble

$$K = \{u \in (H^1(\Omega))^3 / \ \text{div } u = \lambda\}.$$

On désigne par $\|.\|$ indifféremment la norme de $L^2(\Omega)$ et $(L^2(\Omega))^3$. L'objectif de ce problème est de caractériser le minimum du problème $\inf_K J$ puis de l'approcher.

### I. Problème approché par pénalisation

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $u \in (H^1(\Omega))^3$, on pose :

$$J_\varepsilon(u) = J(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega | \text{ div } u - \lambda|^2 \, dx \tag{2}$$

**1.** Justifier rapidement que $J_\varepsilon$ est continue sur $(H^1(\Omega))^3$ et strictement convexe.

**2.** En déduire que $J_\varepsilon$ admet un unique minimum sur $(H^1(\Omega))^3$.

**3.** Caractériser le minimum (*ie* donner l'équation d'Euler).

Dans ce qui suit, on note $u_\varepsilon$ l'unique minimum de $J_\varepsilon$ sur $(H^1(\Omega))^3$.

### II. Passage à la limite $\varepsilon \to 0$.

**4.** Montrer que la famille $(u_\varepsilon)_{1>\varepsilon>0}$ est bornée dans $(H^1(\Omega))^3$, uniformément par rapport à $\varepsilon \in ]0, 1[$.

**5.** Montrer que pour une sous-suite div $u_\varepsilon$ tend fortement vers $\lambda$ dans $(L^2(\Omega))^3$.

**6.** Soit $\pi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}( \text{ div } u_\varepsilon - \lambda)$. Montrer que $(\nabla \pi_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans le dual de $(H^1(\Omega))^3$. En déduire que $(\pi_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $\dot{L}^2(\Omega)$ en admettant que

$$\exists c > 0, \ \forall q \in L^2(\Omega)^3, \quad (\int_\Omega |q|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} \leq c| \int_\Omega q \, dx| + c\|\nabla q\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

**7.** En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $u$ et $\pi$ les limites d'une sous-suite des suites $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\pi_\varepsilon)_\varepsilon$. Préciser la condition limite en $u$.

**8.** Montrer que $u$ est solution du problème de minimisation $\inf_K J$.

**9.** Montrer que $u$, solution du problème de minimisation $\inf_K J$, est unique.

## III. Algorithme

On cherche un algorithme destiné à converger vers le point $(u, \pi)$ caractérisé ci-dessus.
On considère l'algorithme suivant :

1. On choisit $\pi_0 \in (H^1(\Omega))^3$ quelconque.
2. Connaissant $\pi_n$, on trouve $u_{n+1} \in (H^1(\Omega))^3$ qui minimise $u \mapsto J(u) + < \nabla \pi_n, u >_{H^{-1},H^1}$ sur $(H^1(\Omega))^3$.
3. On définit $\pi_{n+1}$ qui minimise $p \mapsto G_n(p)$ sur $H^1(\Omega)$ où
$$G_n(p) = \frac{1}{2}\int_\Omega |p - \pi_n|^2 + \rho |\nabla (p - \pi_n)|^2 \, dx + \alpha \int_\Omega (\text{ div } u_{n+1} - \lambda) p \, dx,$$
avec $\alpha > 0$.

**10.** Vérifier que l'algorithme est bien défini et écrire les équations d'Euler.

**11.** En écrivant les équations vérifiées par $v_n = u_n - u$ et $q_n = \pi_n - \pi$, montrer que
$$\|q_{n+1}\|^2 - \|q_n\|^2 + \rho(\|\nabla q_{n+1}\|^2 - \|\nabla q_n\|^2) + \alpha \int_\Omega \text{ div } v_{n+1}(q_{n+1} - q_n + 2q_n) \, dx = 0.$$

**12.** Montrer que
$$\rho \|v_{n+1}\|^2 + \|\nabla v_{n+1}\|^2 = \int_\Omega \text{ div } v_{n+1} q_n \, dx.$$

**13.** Montrer que
$$-\alpha \int_\Omega \text{ div } v_{n+1}(q_{n+1} - q_n) \, dx = \|q_{n+1} - q_n\|^2 + \rho \|\nabla (q_{n+1} - q_n)\|^2.$$
En déduire que
$$\|q_{n+1} - q_n\|^2 + \rho \|\nabla (q_{n+1} - q_n)\|^2 \leq \alpha \|v_{n+1}\| \|\nabla (q_{n+1} - q_n)\|$$
et que
$$\|q_{n+1} - q_n\|^2 + \rho \|\nabla (q_{n+1} - q_n)\|^2 \leq \frac{\alpha^2}{\rho} \|v_{n+1}\|^2.$$

**14.** Déduire des deux dernières questions que
$$\alpha \int_\Omega \text{ div } v_{n+1}(q_{n+1} - q_n + 2q_n) \, dx \geq (2\alpha\rho - \frac{\alpha^2}{\rho}) \|v_{n+1}\|^2 + 2\alpha \|\nabla v_{n+1}\|^2.$$

**15.** A l'aide des questions précédentes, établir une condition de petitesse sur $\alpha$ assurant la décroissante de la suite $(\|q_n\|^2 + \rho \|\nabla q_n\|^2)_n$.

**16.** En déduire la convergence de la suite $(v_n)_n$, puis celle de $(q_n)_n$. Conclure.