SEATECH-Mécanique numérique 2017

Examen - Documents autorisés.
Durée: 1 heure.

1. Proposer la formule de Green pour l'intégrale suivante lorsque U et V sont deux fonctions régulières de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:
$$\int_\Omega \text{rot}U(x) \cdot V(x)\, dx,$$
où rot désigne le rotationel. On notera Γ le bord de Ω, n la normale unitaire sortante à Ω et $\times$ le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.
On rappelle la formule de Green
$$\int_\Omega \partial_i u(x)v(x)\, dx = -\int_\Omega \partial_i v(x)u(x)\, dx + \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x)\, d\gamma.$$
On en déduit que (on note $U_{i+3} = U_i$, $\partial_{i+3} = \partial_i$ par permutation circulaire)
$$\begin{aligned}\int_\Omega (\partial_{i+1}U_i(x) - \partial_i U_{i+1}(x))V_{i-1}(x)\, dx = &-\int_\Omega \partial_{i+1}V_{i-1}(x)U_i(x)\, dx + \int_\Gamma U_i(x)V_{i-1}(x)n_{i+1}(x)\, d\gamma \\ &+ \int_\Omega \partial_i V_{i-1}(x)U_{i+1}(x)\, dx - \int_\Gamma U_{i+1}(x)V_{i-1}(x)n_i(x)\, d\gamma.\end{aligned}$$
Or,
$$\int_\Omega \text{rot}U(x) \cdot V(x)\, dx = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (\partial_{i+1}U_i(x) - \partial_i U_{i+1}(x))V_{i-1}(x)\, dx,$$
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \partial_i V_{i-1}(x)U_{i+1}(x) - \partial_{i+1}V_{i-1}(x)U_i(x)\, dx &= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \partial_i V_{i-1}(x)U_{i+1}(x) - \partial_{i+2}V_i(x)U_{i+1}(x)\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \partial_{i+1}V_i(x)U_i(x) - \partial_{i+3}V_{i+1}(x)U_{i+2}(x)\, dx, \\ &= \int_\Omega \text{rot}V(x) \cdot U(x)\, dx,\end{aligned}$$
puisque $U_{i+2} = U_{i-1}$ et $\partial_{i+3} = \partial_i$, par permutation circulaire.
On a également,
$$\sum_{i=1}^{3} \int_\Gamma (U_i(x)n_{i+1}(x) - U_{i+1}(x)n_i(x))V_{i-1}(x)\, d\gamma = \int_\Gamma (U(x) \times n(x)) \cdot V(x)\, d\gamma.$$
Ainsi,
$$\int_\Omega \text{rot}U(x) \cdot V(x)\, dx = \int_\Omega \text{rot}V(x) \cdot U(x)\, dx + \int_\Gamma (U(x) \times n(x)) \cdot V(x)\, d\gamma.$$

2. On considère l'EDP d'évolution suivante d'inconnue $u(t,x) \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}&\rho(\partial_t u(t,x) + u \cdot \nabla u) + \nabla p(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ &\partial_t \rho(t,x) + \text{div } (\rho(t,x)u(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ &\rho(t,x) = \overline{\rho} + \frac{1}{c^2}(p(t,x) - \overline{p}), \\ &u(0,x) = u_0(x),\ p(0,x) = p_0(x),\end{aligned}$$

où $\overline{\rho} > 0$, $\overline{p}$, $c > 0$ sont des réels fixés.

(a) Donner une interprétation physique de ce système d'EDP.

On reconnaît la forme non conservative de la conservation de quantité de mouvement pour un fluide de densité ρ et de vitesse u, soumis à la pression p, en première équation ainsi que l'équation de conservation de la masse en deuxième équation. La troisième équation est une loi d'état linéarisée autour de l'état $(\overline{\rho}, \overline{p})$. On a donc l'équation d'Euler compressible pour une loi d'état linéarisée.

(b) On suppose que la donnée initiale est une perturbation de l'état au repos $(0, \overline{p})$ (u_0 supposé petit, $p_0 - \overline{p}$ supposé petit et $\rho - \overline{\rho}$ supposé petit). On note $\tilde{u} = u - 0$, $\tilde{p} = p - \overline{p}$, $\tilde{\rho} = \rho - \overline{\rho}$. Justifier formellement que

$$\begin{aligned}
&\overline{\rho}\partial_t \tilde{u}(t,x) + \nabla \tilde{p}(t,x) \sim 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\
&\partial_t \tilde{p}(t,x) + \overline{\rho} c^2 \mathrm{div}\ (\tilde{u}(t,x)) \sim 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\
&\tilde{u}(0,x) = u_0(x),\ \tilde{p}(0,x) = p_0(x) - \overline{p}.
\end{aligned}$$

On linéarise cette équation autour de l'état $(0, \overline{p})$. Le seul terme nonlinéaire (terme d'inertie) est linéarisé autour de 0, son linéarisé est donc nul, il ne reste que la partie linéaire de l'équation vérifiée par la perturbation

$$\tilde{u}(t,x) = u(t,x) - 0,\ \tilde{p}(t,x) = p(t,x) - \overline{p}$$

qui vérifie bien la condition initiale proposée. On note qu'on a exploité $\partial_t \tilde{\rho}(t,x) = \frac{1}{c^2}\partial_t \tilde{p}(t,x)$ par linéarité de la loi d'état.

Pour une loi d'état quelconque et nonlinéaire, l'exercice est un petit peu plus technique car il faut linéariser la loi d'état.

(c) En déduire que

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 \tilde{p}(t,x) - c^2 \triangle \tilde{p}(t,x) \sim 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\
&\tilde{p}(0,x) = p_0(x) - \overline{p},\ \partial_t \tilde{p}(0,x) = -\overline{\rho} c^2 \mathrm{div}\ (u_0(x)).
\end{aligned}$$

et donner le nom de cette équation.

On dérive en temps la deuxième équation et on injecte la première équation, on trouve bien l'équation des ondes proposée. La donnée initiale $\partial_t \tilde{p}(0,x)$ est obtenue par la deuxième équation à $t = 0$.

3. On considère l'EDP

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 p(t,x) - c^2 \triangle p(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\
&p(0,x) = p_0(x),\ \partial_t p(0,x) = p_1(x).
\end{aligned}$$

(a) Appliquer la transformée de Fourier en espace et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\hat{p}(t,\xi)$.

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 \hat{p}(t,\xi) + c^2 |\xi|^2 \hat{p}(t,\xi) = 0, \quad (t,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\
&\hat{p}(t,\xi) = \hat{p}_0(\xi),\ \partial_t p(t,\xi) = \hat{p}_1(\xi).
\end{aligned}$$

(b) Expliciter la solution. On a obtenu une EDO paramétrée par la fréquence ξ. La solution s'écrit

$$\hat{p}(t,\xi) = A(\xi)\cos(c|\xi|t) + B(\xi)\sin(c|\xi|t),$$

avec A et B des constantes dépendantes de la fréquences à déterminer en fonction des données initiales $\hat{p}_0(\xi)$ et $\hat{p}_1(\xi)$.

$$A(\xi) = \hat{p}_0(\xi), \quad B(\xi) = \frac{\hat{p}_1(\xi)}{c|\xi|}.$$

(c) Vérifier par une technique d'estimation d'énergie que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t p(t,x)|^2\,dx + c^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla p(t,x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} |p_1|^2\,dx + c^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla p_0|^2\,dx.$$

On pensera à multiplier l'EDP par $\partial_t p$ et intégrer en espace. On peut vérifier cette propriété à l'aide de la transformée de Fourier et de l'expression analytique de $\hat{p}(t,\xi)$. On propose de le faire ici par estimation d'énergie formelle. On remarque que $q = \partial_t p$ vérifie

$$(\partial_t q)q = \frac{1}{2}\partial_t q^2.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^3} -\triangle\, p\, q\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla p \cdot \nabla q\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla p|^2\,dx.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} |q(t,x)|^2 + c^2|\nabla p(t,x)|^2\,dx = 0.$$

D'où le résultat après intégration en temps.

(d) On propose la discrétisation temporelle de pas δt suivante:

$$\frac{\partial_t p^{n+\frac{1}{2}} - \partial_t p^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} - c^2 \triangle \frac{p^{n+1} + p^{n-1}}{2} = 0,$$
$$\tilde{p}(0,x) = p_0(x), \ \partial_t \tilde{p}(0,x) = p_1(x),$$

où $\partial_t p^{n+\frac{1}{2}}$ est défini par

$$\partial_t p^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p^{n+1} - p^n}{\delta t}.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t p^{n+\frac{1}{2}}|^2\,dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla p^{n+1}|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t p^{n-\frac{1}{2}}|^2\,dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla p^{n-1}|^2\,dx.$$

On exploite l'identité remarquable

$$(\partial_t p^{n+\frac{1}{2}} - \partial_t p^{n-\frac{1}{2}})(\partial_t p^{n+\frac{1}{2}} + \partial_t p^{n-\frac{1}{2}}) = |\partial_t p^{n+\frac{1}{2}}|^2 - |\partial_t p^{n-\frac{1}{2}}|^2,$$

ainsi que

$$\partial_t p^{n+\frac{1}{2}} + \partial_t p^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\delta t}(p^{n+1} - p^{n-1}),$$

puis que

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \triangle \frac{p^{n+1} + p^{n-1}}{2}(p^{n+1} - p^{n-1})\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla p^{n+1} + \nabla p^{n-1}}{2}(\nabla p^{n+1} - \nabla p^{n-1})\,dx.$$

On conclut sur le dernier terme à nouveau par l'identité remarquable:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla p^{n+1} + \nabla p^{n-1}}{2} (\nabla p^{n+1} - \nabla p^{n-1}) \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla p^{n+1}| - |\nabla p^{n-1}|^2 \, dx.$$

Il ne reste plus qu'à prendre l'expression du schéma, multiplier par $\partial_t p^{n+\frac{1}{2}} + \partial_t p^{n-\frac{1}{2}}$, intégrer en espace et exploiter les identités ci-dessus.