TP sur parabolique.

1. Résoudre numériquement à l'aide de l'approximation EF $\mathbf{Q}_1$ conforme en espace , sur maillage cartésien uniforme, l'équation de la chaleur suivante: On considère l'ouvert $\Omega =]0,1[\times]0,1[$,

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(x) \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ u(t,x) + \partial_n u(t,x) = 0 \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega. \end{cases}$$

   On choisira une discrétisation implicite en temps.

2. Vérifier numériquement la stabilité inconditionnelle dans $L^2(\Omega)$.

3. Construire une solution analytique en adaptant le second membre f et valider la convergence au temps $T > 0$ fixé de votre choix.

4. Justifier par écrit la stabilité inconditionnelle dans $L^2(\Omega)$ pour le schéma en temps de Cranck-Nicholson:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}(x)-u^n(x)}{\delta t} - \Delta \frac{u^{n+1}(x)+u^n(x)}{2} = 0 \text{ dans } \Omega \\ u^{n+1}(x) + \partial_n u^{n+1}(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

5. Prendre $f = 0$, une donnée initiale non triviale, choisir un temps final suffisamment grand pour que le profil de la solution soit stabilisé (seul l'amplitude décroît). Estimer la décroissance comme un coefficient multiplicatif de la forme

$$\exp(-\lambda_0 T).$$

   Donner la valeur de λ_0 et dire à quoi correspond λ_0.

6. Coder le schéma de Cranck-Nicholson pour la même discrétisation spatiale que précédemment. Pour une donnée initiale discontinue, observer et commenter la solution pour les premiers itérés en temps (en fonction de la taille du pas de temps).

Sujet bis: Résolution de Stokes instationnaire.

On considère le problème de Stokes instationnaire en écoulement incompressible sur l'ouvert $\Omega =]0,1[\times]0,1[$,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}(t,x) - \eta\Delta\mathbf{u}(t,x) + \nabla p = \mathbf{f}(x) \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ \text{div } \mathbf{u}(t,x) = 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ \mathbf{u}(t,x) = 0 \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega. \end{cases}$$

1. Proposer l'algorithme temporel de prédiction-correction vu en cours.

2. Discrétiser en espace à l'aide d'un schéma MAC (grille décalé). On rappelle que le maillage en pression cartésien (avec p au centre des mailles), de taille (n, m), maille Ω. Si la condition de bord de Dirichlet en vitesse (adhérence aux parois pour $\mathbf{u} = (u, v)$) est intégrée aux inconnus, alors u est de taille $(n+1, m)$ et v est de taille $(n, m+1)$. Donner l'expresssion des discrétisations différence fini (ou volume fini) des termes Δu, $\partial_x p$ et div $\mathbf{u}$. Puis coder la résolution du problème.

3. Choisir une condition initiale nulle et un forçage $\mathbf{f} = (y - 0.5, -x + 0.5)$. Observer la solution au cours du temps et commentez.