TP sur elliptique et projection.

1. Résoudre numériquement à l'aide de l'approximation EF $\mathbf{Q}_1$ conforme, sur maillage cartésien uniforme, le problème de Robin suivant.

   On considère l'ouvert $\Omega =]0, L[\times]0, H[$,

   $$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u(x) = f(x) \text{ dans } \Omega \\ \gamma u(x) + \partial_n u = g \text{ sur } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

   où $\gamma > 00$ pourra être pris petit pour approcher le problème de Neuman et grand pour approcher le problème de Dirichlet. On remarquera que la restriction des fonctions $\mathbf{Q}_1$ au bord sont $\mathbf{P}_1$ du bord.

2. Que doit-on ajouter comme condition pour traiter le cas $\gamma = 0$? Le justifier.

3. Choisir γ et $g = 0$ à votre guise, valider la convergence numériquement et donner l'ordre de convergence numérique en choisissant une solution analytique non polynômiale. (On choisit u respectant la condition limite et on calcule f en conséquence).

4. On rappelle que tout champ de vitesse de $(L^2(\Omega))^2$ se décompose en un champ à divergence nulle et un gradient: soit $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2$, il existe un unique $p \in \dot{H}^1(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in L^2(\Omega))^2$ tel que div $\mathbf{v} = 0$ vérifiant

   $$\mathbf{u} = \nabla p + \mathbf{v} \tag{1}$$

   et $\mathbf{v} \cdot n = \mathbf{u} \cdot n + c$, où c est une constante à déterminer. (On se ramènera au problème précédent avec $\gamma = 0$, en appliquant la divergence à (1)).

5. Soit $\mathbf{u}(x, y) = (x + y, y - x)$, écrire l'équation vérifiée par p, la résoudre numériquement et en déduire $\mathbf{v}$. Représenter numériquement $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.