Outils numériques pour
des modèles d'EDP issus
de problèmes physiques

14 × 3 h : repartis 50% TP
50% cours / exos

+ Types d'EDP : - elliptique
- parabolique
- dispersives
- hyperbolique d'ordre 2
(equa° des ondes)

Sauf Navier-Stokes incompressible
EDP de la physique : cours
TP : 3 initia°
+5 projets (aide sur 3 TP)
↳ 1 partie de la note

TP initia° : package en F90
- sys. creux.
- sortie
- visu : Visit
(salle machine linux)

Chap 1 INTRODUCTION

I Rappel d'analyse.

1) Espace de fonction.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

On peut choisir f plus ou moins régulière : $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$

$f \notin C^0(\Omega)$

Un espace de fonction est en général de dimension ∞.
Les différents espace choisis avec une norme associée. Ces normes n'ont aucune raison d'être équivalentes.

exple : $f \in L^2(\Omega)$:

$$\|f\|^2_{L^2} = \int_\Omega |f|^2 dx$$

$$\|f\|^p_{L^p} = \int_\Omega |f|^p dx$$

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} |f|$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \text{ tq } \partial_{x_i} f \in L^2(\Omega) \atop 1 \leq i \leq n \right\}$$

$$\|f\|_{H^1}^2 = \int_\Omega f^2 dx + \sum_i \int_\Omega |\partial_{x_i} f|^2 dx$$

Lorsque ces espaces de fonctions seront approchés par des espaces de dimension finie, il faut être vigilant sur le fait que les normes associées seront $\Longleftrightarrow$ à des constantes multiplicatives près qui ne seront pas uniformes par rapport à l'approximat°.

2) Fonctions de plusieurs variables

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

a) Notat° $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$\frac{\partial}{\partial x_i} f = \partial_i f$ est la dérivée de f dans la direction x_i.

Si $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$, F est une fonction vectorielle

$$F \in C^\infty(\Omega) \iff F_i \in C^\infty(\Omega) \quad 1 \leq i \leq p$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_p).$$

b) Formule de Green.

en dimension 1 : IPP

$$(fg)' = fg' + f'g$$

$$\int_a^b f'g = -\int_a^b fg' + [fg]_a^b$$

en dimension supérieure :

Formule de Green (Stokes) :

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\int_\Omega \partial_{x_i} f\, g\, dx = -\int_\Omega f\, \partial_{x_i} g\, dx + \int_{\partial\Omega} f\, g\, n_i\, d\gamma}$$

où $\partial\Omega$ est le bord de Ω, n_i la i-ème composante de la normale (unitaire) sortante.

3) Opérateurs différentiels.

a) Définition :

- le gradient : $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

$$\nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots \partial_{x_n} f)^t.$$

exemple : le champ électrique dérive d'un potentiel V :

$$E = -\nabla V.$$

- la divergence : $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i$$

en electrostatique : $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

en méca flu : $\operatorname{div} u = 0$

u : vitesse de l'écoulement

↳ écoulement incompressible

- le laplacien : $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\nabla f)$

$$= \sum_i \partial^2_{x_i} f$$

exple $-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon}$

le rotationnel (curl en anglais)

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{rot}\, F = \nabla \times F$$

$$= \begin{vmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{vmatrix}$$

en méca flu : le vecteur tourbillon est $\nabla \times u$ où u est la vitesse

En electromagnétisme : eq de Maxwell :

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0$$

$$\partial_t E - c^2 \nabla \times B = -\partial_T \Gamma$$

- le laplacien vectoriel :

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

$$\Delta F = \begin{pmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \end{pmatrix} = \nabla \cdot \nabla F = \nabla \nabla \cdot F - \nabla \times (\nabla \times F)$$

Exo : retrouver l'éq des ondes électro magnétiques

b) Formules remarquables.

<u>propriété</u> : $\underline{\text{rot } \nabla f = 0} \ \forall f$.

<u>preuve</u> : exo $\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2) f \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

La réciproque est fort utile :

<u>prop</u> : Si $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et si Ω est simplement connexe et si $\nabla \times F(x) = 0 \ \forall x \in \Omega$ alors il existe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tq

$$F = \nabla f.$$

On dit que F dérive d'un potentiel.

Exple : un fluide irrotationnel dérive d'un potentiel.

$$u = \nabla \psi.$$

Si de plus l'écoulement est incompressible : $\text{div } u = 0$, alors

$$\Delta \psi = 0.$$

et l'écoulement est défini et piloté par $\psi_{|\partial \Omega}$.

prop : $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$

preuve : exo.

On a là aussi une réciproque :

prop : Si $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et si Ω est simplement connexe et si $\operatorname{div} F = 0$ alors $\exists\, G$ tq $F = \nabla \times G$.

Rqu : G est fixé qu'à un gradient près (car $\nabla \times \nabla = 0$)

c) Formule de Green généralisée

- $$\int_\Omega \nabla f \cdot G \, dx = -\int_\Omega f \operatorname{div} G \, dx + \int_{\partial\Omega} f \, G \cdot n \, d\gamma$$

en effet $$\int_\Omega \sum_i \partial_i f \, G_i \, dx = -\int_\Omega f \sum \partial_i G_i \, dx + \int_{\partial\Omega} f \sum_i G_i n_i \, d\gamma$$

$$\int_\Omega \Delta f(x)\, g(x)\, dx = \int_\Omega \operatorname{div} \nabla f \; g \, dx$$

$$= -\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} g \, \underbrace{\nabla f \cdot n}_{\partial_n f} \, d\gamma$$

d'après la formule précédente

$$= + \int_\Omega f \, \Delta g \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, \partial_n f \, d\gamma$$

$$- \int_{\partial\Omega} \partial_n g \, f \, d\gamma$$

Exo : $\displaystyle\int_\Omega \Delta^2 f \; g \, dx = \int_\Omega \Delta f \; \Delta g \, dx$

$+ \dots$

$$\int_\Omega \nabla \times W \cdot V \, dx = \dots$$

4) Exemples d'EDP en Physique.

a) Cas linéaire.

α) Stationnaire.

$-\Delta f = g$ sur Ω : équation de Laplace.

ces éq. seront révisées ds le dnf 2

ex : $-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ en electrostatique

$\Delta \Psi = 0$ → écoulement irrot. incomp.

il manque des conditions limites au bord de Ω.

On rencontre le m type d'EDP (elliptique) en méca flu :

Stokes incompressible stationnaire :

$$\begin{cases} -\mu \Delta u + \nabla p = f & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{sur } \Omega \\ + CL & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Elasticité linéaire :

ε_{ij} : tenseur des déformat°.

$\vec{u}$: champ des deplacements

σ_{ij} : tenseur des contraintes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\operatorname{div} \sigma + \vec{f} = \vec{0} \text{ ds } \Omega$$

$\vec{f}$: force appliquée.

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(u)$$

+ CL à préciser.

~~4~~) EDP d'évolution.

En général, la variable temps, notée t, paramètre la fonction inconnue (phénomène instationnaire). L'asymptotique n'est pas toujours un état stationnaire du problème.

- Eq de type la chaleur (parabolique chap 3). Cette eq décrit tous les phénomènes de diffusion instationnaires.

$$\partial_t \theta - \Delta \theta = f$$

- l'eq des ondes : (chap 4)

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f$$

c : vitesse de propagation.

- se rencontre en electromagnétisme.
- " " " en acoustique.
- " " " en elasticité.

$$\underline{\underline{\rho \partial_{tt}^2 u_i = \operatorname{div} \sigma_i + \rho f_i}}$$

- Eq dispersives.
  - eq de Schrödinger

$$u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{C}$$

$$i \partial_t u + \Delta u = 0$$

b) Eqs Non Linéaires.

On reprend les modèles précédents en y intégrant des termes N.L. (ie faisant intervenir des produits)

- Exple : Navier-Stokes :

$$\rho(\partial_t u + \underline{\underline{u \cdot \nabla u}}) - \mu \Delta u + \nabla p = \rho f$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (\text{incompressible})$$

- Schrödinger NL

$$i\partial_t u + \Delta u = \pm |u|^2 u$$

Le phénomène de compensation entre terme dispersive et le terme N.L.

On a le m type de difficulté avec KdV : $\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0$ (encore une eq d'onde de surface)

Idem avec Boussinesq, BBM...

Chap. 2

Problème aux limites elliptique

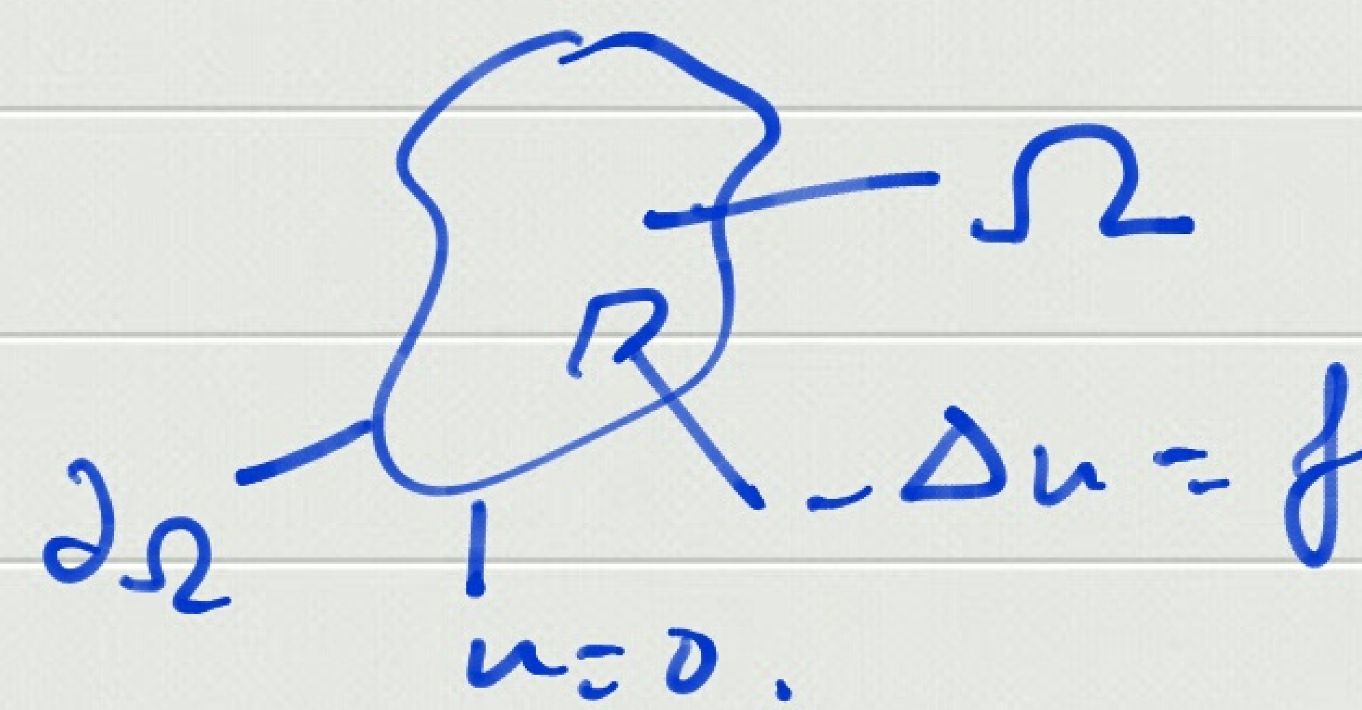
Le but est de revoir le passage d'une formulation EDP à une formulation variationnelle ou formulation faible.

1) Exemple du problème de Dirichlet.

On cherche u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné, de bord $\partial\Omega$



Formellement, on multiplie l'EDP par une fonction v et on intègre sur Ω ;

$$\int_\Omega -\Delta u \, v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\|$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n u \, v \, d\gamma = \int_\Omega f v \, dx$$

On va supposer $v_{|\partial\Omega} = 0$, m̂ hypothèse que ce qui est demandé à u.

On a alors $\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

$\forall v \in ?$ tq $v_{|\partial\Omega} = 0$.

Si on veut u et v ds le m̂ espace et que $\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx < +\infty$, on choisit l'espace naturel : $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \nabla u \in (L^2(\Omega))^n, u_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$$

2) Formulation Variationnelle et thm de Lax-Milgram

On se donne :

i) un espace de Hilbert V de norme $\| . \|$

ii) une forme bilinéaire $(u, v) \longrightarrow a(u, v)$ continue sur $V \times V$ ie $a(u,v) \leq C \|u\| \|v\|$ et V-elliptique (ou coercive sur V) ie $\exists c > 0$ tq $a(u,u) \geq c \|u\|^2$ $\forall u \in V$.

iii) une forme linéaire ℓ, continue sur V, ie $\ell(v) \leq c\|v\|$.

Pb : Formulation Variationnelle :

$$(\mathcal{V}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tq } \forall v \in V \\ a(u,v) = \ell(v). \end{cases}$$

<u>Thm de Lax-Milgram</u> : Sous les hyp. (i)→(iii), le pb $(\mathcal{V})$ admet une unique solution $u \in V$.

Application : la formulation variationnelle du pb de Dirichlet vérifie les hyp. de Lax-Milgram.

$V = H^1_0(\Omega)$. $\|v\|^2 = \|v\|^2_{L^2} + \|\nabla v\|^2_{L^2}$

$(u|v)_V = (u|v)_{L^2} + (\nabla u \,|\, \nabla v)_{L^2}$

$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}$

par Cauchy-Schwarz.

$\leq \|u\|_V \|v\|_V$

$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq c \underbrace{\left[\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]}_{\|u\|^2_V}$

$c > 0$

L'inégalité $\int |\nabla u|^2 dx \geq c_0 \int |u|^2 dx$

$\forall u \in H^1_0(\Omega)$

est vrai pour un $c_0 > 0$, c'est l'inégalité de Poincaré.

ii) est donc vrai.

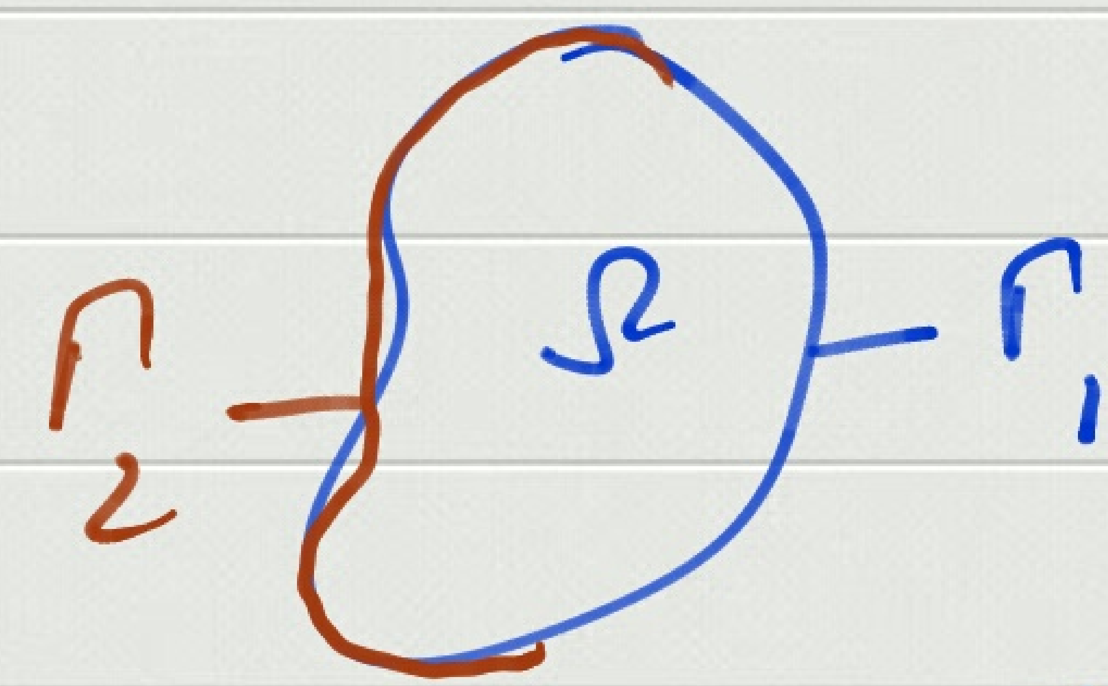
iii) est vrai, par exemple si $f \in L^2(\Omega)$.

$$\int_\Omega f v \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$
$$\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_V .$$

3) Exemples de F.V.

Soit l'EDP :
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \partial_n u_{|\Gamma_1} = 2 \\ \partial_n u + 3u_{|\Gamma_2} = 1 \end{cases}$$

avec $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$



On écrit formellement la F.V.

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n u\, v\,d\gamma + \int_\Omega u v\,dx = \int_\Omega f v\,dx$$

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n u\, v\,d\gamma = \int_{\Gamma_1} 2 v\,d\gamma + \int_{\Gamma_2} -3 u v\,d\gamma + \int_{\Gamma_2} v\,d\gamma$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx + \int_\Omega u v\,dx + 3\int_{\Gamma_2} u v\,d\gamma$$

$$l(v) = \int_\Omega f v\,dx + 2\int_{\Gamma_1} v\,d\gamma + \int_{\Gamma_2} v\,d\gamma.$$

On choisit $V = H^1(\Omega)$.

$$\int_{\Gamma_2} u v\,d\gamma \leq \|u\|_{L^2_{\Gamma_2}} \|v\|_{L^2_{\Gamma_2}}$$

$$\leq \|u\|_{L^2_{\partial\Omega}} \|v\|_{L^2_{\partial\Omega}}$$

$$\leq C \|u\|_{H^{1/2}_\Omega} \|v\|_{H^{1/2}_\Omega}$$

$$\leq C' \|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \|u\|^{1/2}_{H^1(\Omega)} \|v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \|v\|^{1/2}_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq C'' \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

idem pour les autres majoraᵗⁱᵒⁿˢ.

$a(u,u) = \|u\|^2_{H^1} + 3\int_{\Gamma_2} u^2 d\gamma$

$\geq \|u\|^2_{H^1} \Rightarrow a(\cdot,\cdot)$ H^1 elliptique

Idem pour la continuité de $l(v)$.

· On peut donc appliquer le thm de Lax-Milgram : $\exists!\, u \in H^1(\Omega)$

· On va vérifier que le u ainsi construit vérifie bien le pb de départ : l'EDP.

On se limite à $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

et $a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

On refait les formules de Green dans l'autre sens.

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\, v\, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Donc $-\Delta u + u - f = 0$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$

$-\Delta u + u = f \in L^2(\Omega)$

On refait le m calcul avec $v \in H^1(\Omega)$ $\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\, v\, dx$

$+ \int_{\partial\Omega} \partial_n u\, v\, d\gamma + 3\int_{\Gamma_2} u v\, d\gamma + \dots$

$$+\int_{\Gamma_1} 2v\,d\gamma - \int_{\Gamma_2} v\,d\gamma = 0$$

Comme $\int_{\Omega} \dots = 0$, il reste

$$\int_{\Gamma_1} (\partial_n u - 2)\, v\,d\gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_2} (\partial_n u + 3u - 1)\, v\,d\gamma = 0$$

$v_{|\Gamma_1} = 0$ et v "qcq" sur Γ_2 :

Donc $\partial_n u + 3u - 1 = 0$ sur Γ_2 au sens du dual des v "qcq".

On fait de m avec v "qcq" sur Γ_1 et $\int_{\Gamma_1} (\partial_n u - 2)\, v\,d\gamma = 0$

↳ $\partial_n u = 2$ au sens du dual des v "qcq", de $H^{1/2}(\Gamma_1)$

- Exercice : Trouver la F.V. pour le système :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(k(x)\nabla u_1(x)) - u_2(x) = f(x) & \text{sur } \Omega \\ -\Delta u_2(x) + u_2(x) + u_1(x) = g(x) & \text{sur } \Omega \\ u_{1|\partial\Omega} = 0 \\ \partial_n u_{2|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

On multiplie la 1ère eq par v_1, la 2ème par v_2, on somme, on intègre sur Ω et on trouve:

$$\int_\Omega -\mathrm{div}(k\nabla u_1) v_1\,dx - \int_\Omega \Delta u_2\, v_2\,dx$$
$$-\int_\Omega u_2 v_1\,dx + \int_\Omega u_1 v_2\,dx + \int_\Omega u_2 v_2\,dx$$
$$= \int_\Omega f v_1 + g v_2\,dx$$

En appliquant la formule de Green, il vient:

$$\int_\Omega k\nabla u_1 \cdot \nabla v_1\,dx + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2\,dx$$
$$-\int_{\partial\Omega} k\partial_n u_1\, v_1\,d\gamma - \int_{\partial\Omega} \partial_n u_2\, v_2\,d\gamma + \dots$$

On choisit $v_1 \in H^1_0(\Omega)$ pour éliminer le 1er terme de bord, ce qui n'est pas gênant puisqu'on cherchera u_1 dans le m̂ espace que v_1.

On obtient : $v_1 \in H^1_0(\Omega)$, $v_2 \in H^1(\Omega)$

$$a\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = \int_\Omega k\nabla u_1 \cdot \nabla v_1\,dx$$
$$+ \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2\,dx + \int_\Omega u_2 v_2\,dx$$
$$+ \int_\Omega u_1 v_2 - u_2 v_1\,dx$$

$$\ell\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix} = \int_\Omega f v_1\,dx + \int_\Omega g v_2\,dx.$$

On vérifie que a et l sont resp. bilinéaires et linéaires continues sur $H^1_0(\Omega)\times H^1(\Omega) = V$ muni de la norme : $\left\|\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right\|_V^2 = \|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2$

Si k est borné, la continuité de a est vérifiée.

$$\int k \nabla u_1\cdot\nabla v_1\,dx \le |k|_\infty \|\nabla u_1\|_{L^2}\|\nabla v_1\|_{L^2}$$

...

• a est V-elliptique :

$$a(u,u) = \int_\Omega k|\nabla u_1|^2 + \|u_2\|_{H^1}^2 + \int_\Omega \cancel{u_1 u_2} - \cancel{u_2 u_1}\,dx \qquad u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

$$\geq C\left[\|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2\right]$$

vrai si $\underline{\underline{k(x), k_0 > 0}}$ et

on a appliqué l'inégalité de Poincaré sur $H^1_0(\Omega)$.

$(\|u\|_{L^2} \le c\|\nabla u\|_{L^2},\ u\in H^1_0)$

4) Le pb de Neuman.

En mécanique des fluides incompressibles on est amené à projeter un champ de vitesse défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sur les champ de vitesse à divergence nulle.

Soit $u \in (L^2(\Omega))^n$ $(n = 2$ ou $3)$.

ce champ de vitesse.

Il existe une décomposition (de Hodge ou de Leray) :

$$u = u_{//} + u_\perp$$

avec $\operatorname{div} u_\perp = 0$

$u_{//}$ prend la forme $\nabla \varphi$

et $u_\perp$ — — — $\operatorname{rot} \psi$

Donc $\underline{\operatorname{div} u} = \operatorname{div} \nabla \varphi = \underline{\Delta \varphi}$

Au bord de Ω, on choisira :

(si on peut) $u \cdot n = u_\perp \cdot n$

(en fait : si $\int_{\partial\Omega} u . n d\sigma = 0$)

On veut donc $u_{//} \cdot n = (u - u_\perp) . n = 0$

$$\begin{array}{c} u_{//} \cdot n \\ \| \\ \underline{\partial_n \varphi = 0} \end{array}$$

On se retrouve avec φ défini par :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \operatorname{div} u \\ \partial_n \varphi = 0 \end{cases}$$

On est donc intéressé par le pb de Neuman (ou pb de Poisson) :

$$\boxed{(N) \begin{cases} -\Delta \varphi = f \\ \partial_n \varphi = 0 \end{cases}}$$

Rque : Condition de compatibilité.

On voit qu'$\exists$ une condition nécessaire pour qu'une solu° puisse exister :

$$\int_\Omega \Delta \varphi = \boxed{\int_{\partial\Omega} \partial_n \varphi = \int_\Omega f \, dx}$$

On cherche la F.V. du pb

(N) : On multiplie par ψ et on intègre : (fonction test)

$$\int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx = \int_\Omega f \psi \, dx - \int_{\partial\Omega} \cancel{\partial_n \varphi} \, \psi \, d\gamma$$

On propose $a(\varphi, \psi) = \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx$

$\ell(\psi) = \int f \psi \, dx$

Si $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$, tout marche par le thm de Lax-M. sauf la H^1-ellipticité.

On va choisit $\varphi, \psi \in \mathring{H}^1(\Omega)$

$$= \{\varphi \in H^1 / \int_\Omega \varphi = 0\}$$

Sur cet espace, on admet que l'inégalité de Poincaré est vrai et on a ainsi la $\mathring{H}^1$-ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$.

<u>Rque</u> : Ce n'est pas choquant de choisir φ à $\int \varphi = 0$ car cela permet de fixer la constante de toutes les solu° de $(\mathcal{N})$. Car si une solu° de $(\mathcal{N})$ exist alors cette solu° + cte est encore solu°.

Donc $(\mathcal{V})$ $\quad a(\varphi, \psi) = l(\psi)$ $\quad \forall \psi \in \mathring{H}^1(\Omega)$

admet une ! solu° de $\mathring{H}^1(\Omega)$.

La solu° de $(\mathcal{V})$ est-elle solu° de $(\mathcal{N})$?

On remarque que

$$a(\varphi, \psi + c) = a(\varphi, \psi) \text{ avec } c = \text{cte}.$$

$$\ell(\psi + c) = \ell(\psi) + c\int_\Omega f\,dx$$

Or $\underline{\int_\Omega f\,dx = 0}$

Donc $\quad a(\varphi, \psi + c) = \ell(\psi + c) \quad \forall c = \text{cte}.$

Donc $\forall \psi \in H^1(\Omega)$, $a(\varphi, \psi) = \ell(\psi)$.

Or $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \Rightarrow a(\varphi, \psi) = \ell(\psi)$
$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Après la Formule de Green, on trouve : $\int_\Omega (-\Delta\varphi - f)\,\psi\,dx = 0$

Donc $-\Delta\varphi = f$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$
et donc ds $L^2(\Omega)$.

On refait le m̂ calcul avec $\psi \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n\varphi\,\psi\,d\gamma = 0 \quad \forall \psi.$$

Donc $\partial_n \varphi = 0$ en un certain sens.

5) Le pb de Stokes incompressible

On cherche à minimiser la déformat° du fluide incompressible soumis à des forces volumiques f.

On cherche

$$\min_{u \in V} \int_\Omega \frac{\mu}{2} |\nabla u|^2 - f \cdot u \, dx = J(u)$$

$$V = \{ v \in (H_0^1(\Omega))^n , \operatorname{div} v = 0 \}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si u réalise le min sur V :

$$J'(u)(v) = \mu \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx = 0$$

$\forall v \in V$.

Donc

$$\mu \int \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V.$$

F.V.

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{2\varepsilon} \int |\operatorname{div} v|^2 dx$$

$\varepsilon > 0$ destiné à être petit.

On va minimiser J_ε sur $(H_0^1(\Omega))^n$.

On espère que si u_ε solution de

$$\min_{v \in H_0^1} J_\varepsilon(v) = J_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

alors $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u$ (u solution $\min_V J$)

- $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u) = J(u)$

Donc $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$ ind de ε.

Donc $\displaystyle \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |\operatorname{div} u_\varepsilon|^2 dx + \mu\int |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq C + 2\int f u_\varepsilon$

$\leq C + 2\|f\|_{L^2}\underbrace{\|u_\varepsilon\|_{L^2}}_{\leq c'\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}}$

$\leq C + C''\|f\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2$

Donc $\displaystyle \frac{\mu}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int |\operatorname{div} u_\varepsilon|^2 \leq C + C''\|f\|^2$

$\leq K$ ind de ε.

Donc $\displaystyle \int_\Omega (\operatorname{div} u_\varepsilon)^2 dx \leq K\varepsilon$

et $\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq K$.

$\hookrightarrow \begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ ds } H_0^1. \\ \operatorname{div} u_\varepsilon \to 0 \text{ ds } L^2. \end{cases}$

On introduit $p_\varepsilon = -\dfrac{\operatorname{div} u_\varepsilon}{\varepsilon}$.

- On regarde l'EDP associée à $\min J_\varepsilon$.

$\displaystyle J'_\varepsilon(u_\varepsilon)(v) = 0 = \mu\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v\, dx - \int_\Omega f v\, dx + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\int \operatorname{div} u_\varepsilon \operatorname{div} v\, dx}_{-\int_\Omega p_\varepsilon \operatorname{div} v\, dx}$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

Donc, si on se limite à $v \in (\mathcal{D}(\Omega))^n$:

$$\int_\Omega \left(-\mu \Delta u_\varepsilon - f + \nabla p_\varepsilon\right) \cdot v \, dx = 0$$

donc $-\mu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f$ ds $\mathcal{D}'$
ds L^2.

On montre (par $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ borné unif^t en ε)
que ∇p_ε est borné ds $(H_0^{-1})'$ et
que $p_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} p_0$ donné ds $\dot{L}^2(\Omega)$

On peut alors passer à la limite sur la formula° faible et on obtient

$$\mu \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \nabla p_0 \cdot v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$\forall v \in (H_0^1)^n$

Soit $\begin{cases} -\mu \Delta u_0 + \nabla p_0 = f \\ \operatorname{div} u_0 = 0 \end{cases}$

Or on a de plus que $J(u_\varepsilon) \to J(u)$
et $\to J(u_0)$

$$\Rightarrow u = u_0.$$

On a ainsi identifier le pb de Stokes incompressible comme une équivalence au pb de minimisa° $\min_V J$.

De plus le couple (u, p) est point selle du Lagrangien

$\mathcal{L}(v,q) = J(v) + \int_\Omega \nabla q \cdot v \, dx$

avec $v \in (H^1_0(\Omega))^n$, $q \in L^2(\Omega)$.

Par cette approche (Lagrangien), les algos d'Uzawa, Harrow-Hurwicz sont des manières de selectionner le pt selle (u,p). (saddle point).

6) Méthode de Galerkin.

On se donne une F.V. vérifiant les hyp. du thm de Lax-Milgram

$\forall v \in V$ (Hilbert)

chercher $u \in V$ / $a(u,v) = l(v)$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V

On note $V_m = \mathrm{Vect}(v_0, \dots, v_m)$

On peut definir la F.V. :

$$(F.V)_m : \begin{cases} \text{Chercher } u_m \in V_m, \\ \forall v \in V_m \\ \quad a(u_m, v) = l(v) \end{cases}$$

Par linearité de $a(u_m, \cdot)$ et $l(\cdot)$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \text{chercher } u_m \in V_m \ / \\ \forall\, 0 \le i \le m \\ \quad a(u_m, v_i) = l(v_i). \end{cases}$$

La solu$^{\text{c}}$ $u_m \in V_m$ est une approxim$^{\circ}$ de u grâce au lemme de Céa :

$\exists C>0$ $\quad \|u-u_m\|_V \le C \, \|u - P_{V_m} u\|_V$.

Le sys linéaire sous-jacent à la $(F.V)_m$ est :

$$u_m = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j v_j$$

On cherche $(\alpha_j)_{0 \le j \le m} \in \mathbb{R}$.

et $$\sum_{j=0}^{m} a(v_j, v_i)\, \alpha_j = l(v_i)$$

$i = 0$ à m : $m+1$ éq.

On note $$A = \begin{array}{cc} & \overset{j}{\downarrow} \\ i \to & \begin{pmatrix} a(v_j, v_i) \end{pmatrix} \end{array}$$

la matrice du sys. linéaire.

<u>Rque1</u> : Les méthodes éléments finis conformes ($V_m \subset V$) rentrent dans le cadre des méthodes de Galerkin.

<u>Rque2</u> : $a(v_j, v_i) = \int_\Omega \dots$

$$= \sum_{\text{élém}^{ts}\ \tau} \int_\tau \dots$$

Exemple :

$\int_\tau \nabla v_i \cdot \nabla v_j$ coïncide avec :

$\begin{cases} \text{soit } 0 \text{ si } \operatorname{supp} v_i \cap \tau = \emptyset \\ \qquad\qquad \text{ou } \operatorname{supp} v_j \cap \tau = \emptyset \\ \text{soit } \int_\tau \nabla \varphi_l \cdot \nabla \varphi_k \text{ où } \varphi_l \text{ et } \varphi_k \end{cases}$

sont des fonctions de base associée à l'élément.

et $1 \leq l \leq ddl$ ($= 3$ pour P_1 en dim $= 2$)

$1 \leq k \leq ddl$

$$\int_\tau \nabla \varphi_l \cdot \nabla \varphi_k = M(\tau)\ el(l,k)$$

transformation géométrique

+ chgt variable.

où el est une matrice dite élémentaire de référence associée à un calcul sur un élément de référence ;

La construction générale de la matrice A est alors :

boucle sur les éléments

- calcul de el_τ ;
- identification des numéros globaux du maillage (ou ddl) $\to$ $S = S(1:ddl)$

```
do l = 1, ddl
   do k = 1, ddl
      A(S(l), S(k)) = A(S(l), S(k))
                      + el_g(l, k)
   end do
end do
```

<u>Rque</u> : Les méthodes de type transformée de Fourier rentrent ds le cadre des méthodes de Galerkin.
On choisit une base ~~ON~~ des fonctions trigonométriques qui a l'avantage d'être orthogonale et qui induit donc une matrice A diagonale dès lors que l'EDP sous-jacent est à coeff. constant.
Le seul coût est de décomposer le terme source dans cette base.
Ceci se fait par FFT.

7) Exercice : continuité des flux.

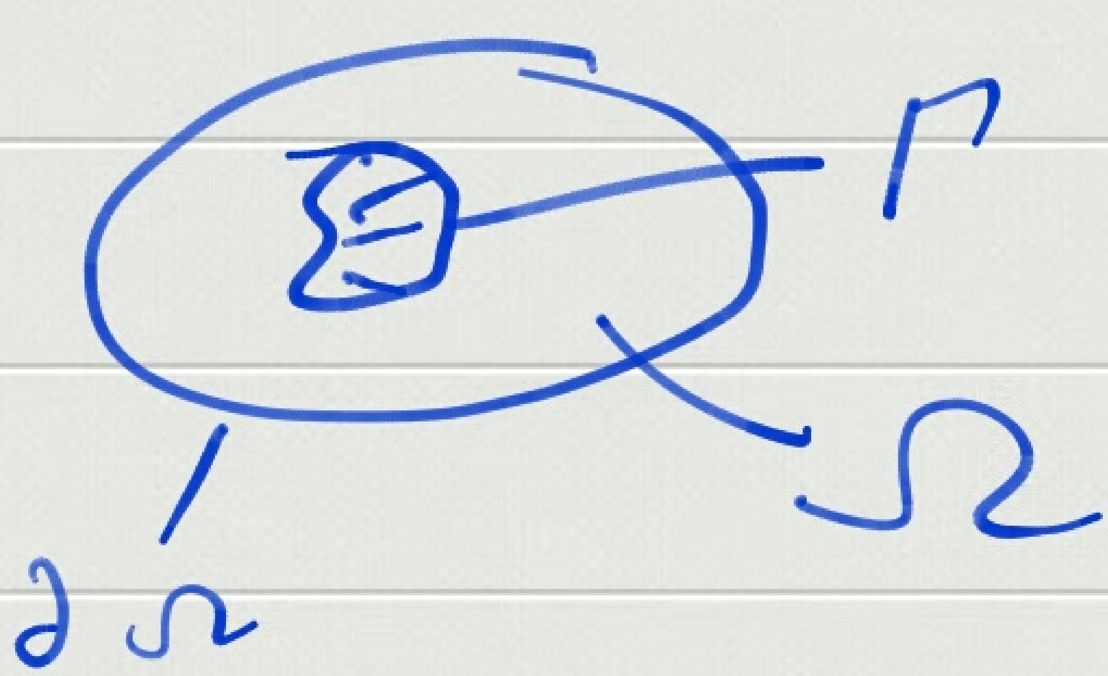
On se donne le pb elliptique :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\alpha(x)\nabla u(x)\right) = f(x), & x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$.

$\alpha \in L^\infty(\Omega)$ $\alpha \geq \alpha_0 > 0$.

et α est discontinu le long d'une courbe $\Gamma \subset \Omega$.



Montrons que $\alpha^- \nabla u^- . n^-_{|\Gamma^-} = \alpha^+ \nabla u^+ . n^-_{|\Gamma^+}$

Exo...

On a continuité du flux normal ($\alpha \nabla u \cdot n$) à travers l'interface de discontinuité de α.

Chap 3

Problème parabolique.

On renvoie au cours ANAV (2A-MACS)

les problèmes paraboliques sont des problèmes d'évolu° qui s'écrivent :

$u(t, x)$: fonction inconnue.
$t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \Omega$.

$$\partial_t u + A u = f = f(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in \Omega$$

+ CL sur $\partial \Omega$ si l'opérateur A le nécessite :

A est un opérateur elliptique (chap. précédent).

A sera en pratique un opérateur d'ordre 2 (ie faisant intervenir des dérivées secondes en espace (x))

+ une donnée initiale ou donnée de Cauchy.

$$u(t=0, \cdot) = u_0(\cdot) \text{ sur } \Omega$$

Ce problème est défini pour $t \geq 0$ car on ne peut pas définir la soluᵒ en temps rétrograde.

La transformée de Fourier en espace permet de comprendre pourquoi la soluᵒ se régularise en $t \nearrow$ et qu'il n'est pas possible de décrire la soluᵒ ds le passé.

Exemple : $\partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0$

$t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}.$

En notant $\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}(u(t,x))$

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,dx$$

On a :

$$\partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0$$

Soit $\hat{u}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}\, \hat{u}(0,\xi)$

La soluᵒ s'écrit :

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,dy$$

Cette formule montre le fait que l'informaᵒ se propage à vitesse infinie pour cette EDP. En effet la Gaussienne ne s'annule jamais et si $u_0 \geq 0$ supp $u_0 \subset]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$

et $\int u_0 > 0$

$\forall t > 0$, m̂ petit, $\forall x \in \mathbb{R}$, m̂ loin de x_0, m̂ si η est petit, $u(t,x) > 0$.

Donc l'info se propage à une vitesse aussi grande que l'on veut, donc ∞.

I Schéma en temps.

Si l'info se propage à vitesse ∞, pour une discrétisᵒⁿ spatiale l'info se propage à une vitesse (finie) grande avec la taille (petite) des mailles.

Les méthodes explicites vont donc induire des conditions CFL très restrictives.

Exple : $\delta t = \dfrac{h}{2/h} = \dfrac{h^2}{2}$

(ici $2/h$ correspond à la vitesse de propagaᵒⁿ de l'informaᵒⁿ).

Cet exple se rencontre en DF 1D pour la chaleur :

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$$

et le schéma en temps et en espace :

$$u_i^n \sim u(t_n, x_i) \qquad t_n = n\delta t$$
$$x_i = ih$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + \frac{1}{h^2}\left(-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n\right) = 0$$

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2\delta t}{h^2}\right)u_i^n + \frac{\delta t}{h^2} u_{i-1}^n + \frac{\delta t}{h^2} u_{i+1}^n$$

Si $\frac{2\delta t}{h^2} \leq 1$, le schéma est stable L^∞ (combinaison convexe)

et le schéma est instable sinon.

Il devient déraisonnable d'utiliser un tel schéma lorsque h est petit.

On introduit alors des schémas implicites.

Exemples :

Le schéma d'Euler implicite pour la chaleur :

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^{n}(x)}{\delta t} - \partial_x^2 u^{n+1}(x) = f(t_{n+1}, x)$$

On reconnaît un problème de nature elliptique :

$$\underbrace{\left(\frac{Id}{\delta t} - \partial_x^2\right)}_{\text{opérateur elliptique}} u^{n+1} = \frac{u^n}{\delta t} + f$$

+ CL pour l'opérateur.
 à bord.

A chaque itération, on doit résoudre un problème elliptique

mais qui sera moins coûteux que le pb elliptique associé au pb stationnaire (formellement $\delta t = +\infty$). Cela suppose que $f(t,\cdot) \xrightarrow{t \to +\infty} f_0$.

On se donne A un opérateur elliptique et l'éq :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0 & t>0, x \in \Omega \\ u(t=0,\cdot) = u_0(\cdot) & + \text{CL associée à } A \text{ si besoin.} \end{cases}$$

Si on transforme ce pb sous forme variationnelle :

$$(\partial_t u, v)_{L^2} + a(u,v) = 0 \quad \forall v \in V$$
ou $\forall v \in L^2(0,T;V)$)

où $a(\cdot,\cdot)$ vérifie les hyp. du thm de Lax-Milgram.

Formellement, on prend $v = u$ et on a : suite au tableau.

fait : A-stabilité pour $\neq$ schémas (E. imp. CN, Gear).

pour parabolique avec ou sans terme source.

+ III Splitting

IV Stokes instationnaire incompressible.

On s'intéresse à l'EDP :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ + \text{CI} : u(t=0,\cdot) = u_0 \\ + \text{CL} : u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

On propose naturellement les schéma d'Euler implicite pour ce problème parabolique :

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1}-u^n}{\delta t} - \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = f \\ \operatorname{div} u^{n+1} = 0 \\ u^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Cette suite est bien définie en tant que sol$^{\text{n}}$ d'un pb elliptique de type Stokes incompressible (cf chap 2).

. Vérifions la stabilité de ce schéma :

On prend le p.s. $L^2(\Omega)$ de l'éq avec u^{n+1} et on $\int_\Omega$.

Ceci revient à écrire la F.V. et prendre u^{n+1} comme fonction test.

Pour simplifier, on prendra $f=0$.

$$\frac{1}{\delta t}\|u^{n+1}\|^2_{L^2} + \|\nabla u^{n+1}\|^2_{L^2} + \underbrace{(\nabla p^{n+1}, u^{n+1})}_{\cancel{-\int_\Omega p^{n+1} \operatorname{div} u^{n+1}} + \int_{\partial\Omega} p \underbrace{u^{n+1}\cdot n}_{=0} \, d\sigma}$$

$$= \frac{1}{\delta t}(u^n, u^{n+1})$$

$$\leq \frac{1}{2\delta t}\|u^n\|^2_{L^2} + \frac{1}{2\delta t}\|u^{n+1}\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\delta t}\|u^{n+1}\|^2_{L^2} + \|\nabla u^{n+1}\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{2\delta t}\|u^n\|^2_{L^2}$$

On obtient donc une suite $\|u^n\|_{L^2}$

$\searrow$ d'où la A-Stabilité $L^2(\Omega)$ de ce schéma.

Néanmoins la résolution de ce pb est aussi complexe que de résoudre Stokes stationnaire.

On va préférer une autre méthode qui exploite l'instationnarité.

. On propose une (des) technique(s) de splitting :

1er splitting : Splitting de Chorin ou Chorin-Temam.

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = f & \text{sur }]0, \delta t[\times \Omega \\ \tilde{u}(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t v + \nabla p = 0 & \text{sur }]0, \delta t[\times \Omega \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{sur }]0, \delta t[\times \Omega \\ v(0, \cdot) = \tilde{u}(\delta t, \cdot) \end{cases}$$

$v(\delta t, \cdot)$ approche $u(\delta t, \cdot)$.

Ce splitting écrit pour un schéma de discrétisation :

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\delta t} - \Delta \tilde{u}^{n+1} = f \\ \tilde{u}^{n+1}_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad \tilde{u}^n = u^n$$

v^n

$$(*)\quad\begin{cases} \dfrac{v^{n+1}-\tilde{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla p^{n+1} = 0 \\ \operatorname{div} v^{n+1} = 0 \\ v^{n+1}_{|\partial\Omega}\cdot n = 0 \end{cases}$$

v^{n+1} approche u^{n+1}.

Pour résoudre (*), on applique div à la 1ère eq :

$$-\frac{1}{\delta t}\operatorname{div}\tilde{u}^{n+1} = -\Delta p^{n+1}$$

et $\partial_n p^{n+1} = 0$

On reconnaît (chap 2) que (*) traduit exactement que

$$v^{n+1} = P_\perp \tilde{u}^{n+1}$$

où $P_\perp$ est le projecteur sur les fonctions à $\operatorname{div} = 0$ introduit au chap 2.

Cet algo porte aussi le nom de prédiction-correction : prédiction en vitesse pour le phénomène visqueux, puis correction en pression pour se ramener à une vitesse à $\operatorname{div} = 0$.

Une variante de ce splitting de Chorin est :

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\delta t} - \Delta \tilde{u}^{n+1} + \nabla p^n = f \\ \tilde{u}^{n+1}\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

(prédiction)

Correction :

$$\begin{cases} \dfrac{v^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\delta t} + \nabla\left(p^{n+1} - p^n\right) = 0 \\ \operatorname{div} v^{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$u^{n+1} \leftarrow v^{n+1}$$

V Navier-Stokes incompressible

On rajoute le terme non-linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{Re}\Delta u + \underline{u\cdot\nabla u} + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ + CL + CI. \end{cases}$$

On peut procéder de m̂ par Splitting

exemple de splitting :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + u_1\cdot\nabla u_1 = 0 \\ u_1(0,\cdot) = u(0,\cdot) = u_0 \\ + CL \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - \frac{1}{Re}\Delta u_2 = f + CL \\ u_2(0,\cdot) = u_1(\delta t,\cdot) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t u_3 + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} u_3 = 0 \\ u_3(0,\cdot) = u_2(\delta t,\cdot) \end{cases}$$

$u_3(\delta t,\cdot)$ est censé approcher $u(\delta t,\cdot)$.

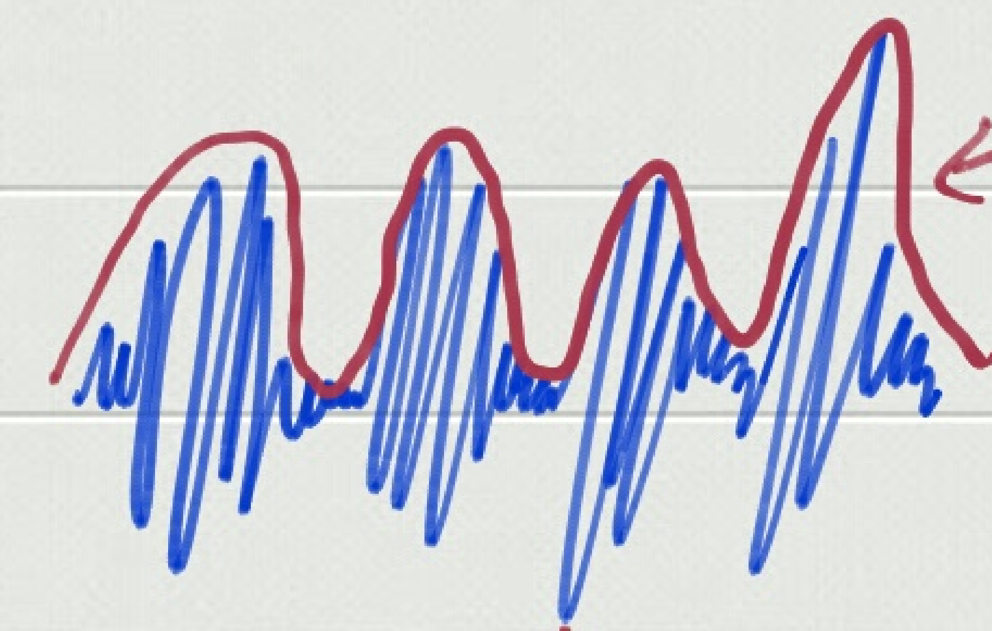
Chap 4

Equations dispersives.

On traitera 2 eq. : Schrödinger NL et KdV qui peuvent être dérivées dans des pbs d'onde de surface. Les "solitons" créés devront pouvoir être suivis numériquement sur de longues distances.

Exple : Depuis les eq. de Maxwell, en cherchant le champ electrique sous la forme $\bar{E} = \mathcal{E}\, e^{\frac{ikz-\omega t}{\varepsilon}}\, \mathcal{E}\left(t, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}, z\right)$

ε destiné à tendre vers 0.



La courbe rouge répond à une eq de Schrödinger.

A) Eq de Schrödinger.

I Schrödinger linéaire.

Cette EDP : $u \equiv u(t,x) \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} i\,\partial_t u + \Delta u = f & t \in \mathbb{R} \\ & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N. \\ u(t=0,\cdot) = u_0 & \\ + \text{CL si } \Omega \text{ est borné.} & \end{cases}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire : $u = v + iw$

$v, w \in \mathbb{R}$.

$$-\partial_t w + \Delta v = Re(f)$$

$$\partial_t v + \Delta w = Im(f)$$

Soit $\left\{ \partial_t \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Im(f) \\ Re(f) \end{pmatrix} \right.$

Si on oublie le second membre, on teste cette eq. avec $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|v|^2 + |w|^2 \right] + 0 = 0$$

sur $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Donc $|u|^2_{L^2} = \int_\Omega u \bar{u}$ est conservée.

On peut refaire le m̂ calcul en prenant l'éq : $i\partial_t u + \Delta u = 0$ multipliée par $\bar{u}$ et intégrée.

On constate que l'énergie $(\|.\|_{L^2})$ est conservée par cette eq.

II Quelques propriétés qualitatives.

1) L'outil Fourier.

Pour comprendre le phénomène, on peut appliquer Fourier :

$$i\partial_t \hat{u} + i\xi\cdot i\xi\, \hat{u} = 0$$

$$i\partial_t \hat{u} - |\xi|^2 \hat{u} = 0 \quad \text{soit} \quad \partial_t \hat{u} + i|\xi|^2 \hat{u} = 0$$

Soit $\hat{u}(t,\xi) = e^{-i|\xi|^2 t}\, \hat{u}_0$

On trouve $|\hat{u}(t,\xi)| = |\hat{u}_0|$

ce qui implique $\|\hat{u}\|_{L^2} = \|\hat{u}_0\|_{L^2}$

ou encore $\|u\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$

On peut en déduire un résultat d'existence pour $\hat{u}$ et donc pour u.

On a une conservation des normes H^s qui autorise $t<0$.

- $$u(t,x) = \frac{e^{-i\pi N/4}}{(2\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x-y)^2/4t}\, u_0(y)\, dy$$

2) La dispersion.

On peut en déduire :

$$|u|_{L^\infty_x}(t) \leq \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} |u_0|_{L^1_x}$$

C'est le phénomène de <u>dispersion</u>.

III Schrödinger Non-linéaire. (NLS)

La nonlinéarité qui intervient ds les modèles est $\pm|u|^2 u$.

$$i\partial_t u + \Delta u = \pm |u|^2 u$$

Si on calcule, comme précédemment $\frac{d}{dt}|u|_{L^2}^2$, on retrouve $=0$, ie

$$|u|_{L^2} = |u_0|_{L^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ce pb N-L reste conservatif mais peut potentiellement contrer les effets dispersifs et produire m̂ des solu° appelées "soliton". On a une solu° à energie concentrée, qui se propage.

IV Choix d'une méthode numérique.

On veut une méthode capable de conserver l'energie pour mieux un soliton durablement.

1) Cas linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u = 0$$

le schéma de Crank_Nicholson est adapté :

$$i\,\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t} + \Delta\left(\frac{u^n+u^{n+1}}{2}\right) = 0$$

En effet, on trouve, par multiplicat° par $\overline{u^n+u^{n+1}}$ et $\int_\Omega$:

$$\|u^{n+1}\|^2_{L^2} = \|u^n\|^2_{L^2} .$$

en ne gardant que la partie imaginaire pure.

2) NLS

On a envie de garder le schéma de (C.N). Mais sur le terme N-L, ce choix est compliqué.

On préfère une technique de Splitting : le splitting de Strang :

- $1/2$ δt de résolut° de $i\partial_t u = |u|^2 u$
- 1 δt — — — $i\partial_t u + \Delta u = 0$ par C.N.
- $1/2$ δt — — — $\partial_t u = |u|^2 u$.

IV Soliton.

On recherche une sol^{n} particulière aux eqs de Schrödinger N-L, sous la forme :

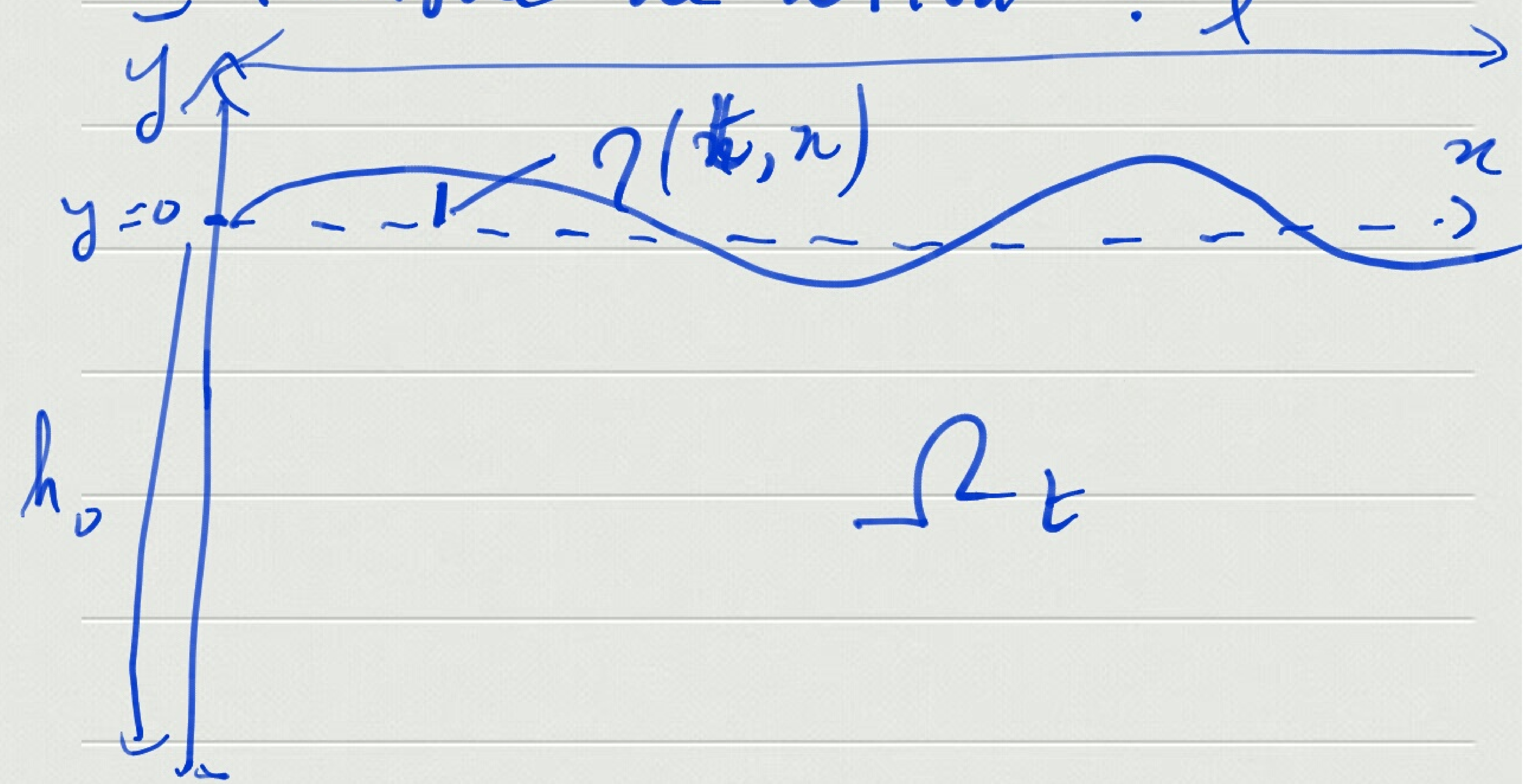
$u(t,x) = u_0(x - ct)$

En explimant la sol^{n} sous cette forme ds les eq. de NLS, on trouve une eq sur $u_0(\cdot)$ (ou famille d'eq) associée à c (qui dépend du u_0 choisi).

B) Les eqs. de KdV.

KdV est dérivée depuis Euler 2D à surface libre, pour décrire le comportement de l'élévation de la surface (1D) de l'eau ds un canal.

I Méthode de dérivation :



Sur Ω_t, on écrit Euler 2D incompressible. On introduit un adimensionnement

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ $\qquad \partial_x u + \partial_y w = 0$

(incompressibilité

. On suppose le fluide irrotationnel : $\mathrm{rot}\, \vec{u} = \vec{0}$

. A la surface $\partial_t \eta + u \partial_x \eta - w = 0$ si $y = \eta$

(le fluide s'écoule le long de la surface).

Dans Ω_t, $0 < y < \eta$, en $y = -h_0$: $w = 0$.

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + w \partial_y u + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0 \text{ ds } \Omega_t, \forall t \\ \partial_t w + u \partial_x w + w \partial_y w + \frac{1}{\rho} \partial_y p = -g \\ \mathrm{rot}\, \vec{u} = 0 \text{ ds } \Omega_t, \forall t \\ w = 0 \quad \text{en } y = -h_0 \\ \partial_t \eta + u \partial_x \eta - w = 0 \text{ en } y = \eta \end{cases}$$

$\tilde{x} = \frac{x}{\ell}$, $\tilde{y} = y/h_0$ $\qquad c_0 = \sqrt{g h_0}$

$\tilde{t} = \frac{c_0}{\ell} t$ $\qquad \varepsilon = \frac{a}{h_0}$

$\sigma^2 = \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2$ $\qquad \tilde{u} = \frac{h_0}{a c_0} u$

$\tilde{w} = \frac{\ell}{a c_0} w$ $\qquad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{a}$

$\tilde{p} = \frac{1}{\rho g h_0} p$

On aura : en abandonnant les "~" :

$$\partial_t u + \varepsilon u \partial_x u + \varepsilon w \partial_y u + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x p = 0$$

$$\varepsilon \sigma^2 \partial_t w + \varepsilon^2 \sigma^2 u \partial_x w + \varepsilon^2 \sigma^2 w \partial_y w + \partial_y p + 1 = 0.$$

- L'étape suivante, consiste à intégrer selon la verticale.
- On regarde ensuite u comme :

$$u(x, \varepsilon \eta, t)$$
$$w(x, \varepsilon \eta, t)$$

- En négligeant les termes "petits" : $\underline{O(\sigma^4), O(\varepsilon \sigma^2)}, O(\varepsilon^3 \sigma^2) \ldots$

On obtient alors le système de Boussinesq :

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \partial_x u + \varepsilon \partial_x (\eta u) - \dfrac{\sigma^2}{6} \partial_x^3 u = 0 \\ \partial_t u + \partial_x \eta + \varepsilon u \partial_x u - \dfrac{\sigma^2}{2} \partial_t \partial_x^2 u = 0 \end{cases}$$

Avec qcq hyp supplémentaires (u uniforme), on obtient KdV :

$$\boxed{\partial_t u + \partial_x^3 u + 6 u \partial_x u = 0}$$

KdV : Korteweg de Vries.

II Propriétés qualitatives de KdV.

On identifie les quantités conservées par KdV : u : hauteur d'eau.

Exo : Vérifier que :

la masse est conservée :

$$\int_0^L u(t,x)\,dx$$

norme L^2 : $\int_0^L u^2\,dx$

énergie : $\int_0^L (\partial_x u)^2\,dx - \frac{1}{6}\int_0^L u^6\,dx$

en supposant le domaine spatiale $[0,L]$ périodique.

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\,\partial_x u = 0$$

raccordement de toutes les quantités souhaitées : $u, \partial_x u, \partial_x^2 u, \dots$

. $\partial_t \int_0^L u + \underbrace{\int_0^L \partial_x^3 u}_{\partial_x^2(u)(L) - \partial_x^2(u)(0) = 0} + 6\underbrace{\int_0^L \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right)dx}_{\text{idem} = 0} = 0$

. Pour $\int u^2$: on multiplie par u et on $\int_0^L$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \underbrace{\int_0^L \partial_x^3 u\, u\, dx}_{-\int_0^L u\,\partial_x^3 u\,dx \quad (3\,\mathrm{IPP})} +$$

$\cancel{\left[\partial_x^2 u\, u\right]_0^L}$ par périodicité

+ idem autres termes de bord

$$+\, 6\underbrace{\int_0^L u\,\partial_x u\ u}$$

$$= \int u^2 \partial_x u$$

$$= \int \frac{1}{2}\partial_x u^2\ u$$

Or $\int u^2 \partial_x u = -\int \partial_x(u^2)\, u$

$$= -2\int u^2 \partial_x u$$

Donc $3\int u^2\partial_x u = 0$

et $2\int_0^L \partial_x^3 u\ u\,dx = 0$

Finalement $\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 = 0$.

III Choix de Schémas conservatifs.

On cherche des schémas capable de conserver les invariants.

Comme pour le terme anti-symétrique de Schrödinger, on est tenté d'introduire un schéma "de type" Crank Nicholson : le schéma de Sanz-Serna :

$$(SS)\quad \frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t} + \partial_x^3 \frac{u^n+u^{n+1}}{2} + \frac{6}{2}\partial_x\left(\frac{u^n+u^{n+1}}{2}\right)^2 = 0$$

Exo : démontrer la conservation L^2.

. Le schéma de C.N stricto-sensu s'écrit :

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t} + \partial_x^3 \frac{u^n+u^{n+1}}{2} + 6\,\partial_x \frac{{u^{n+1}}^2+{u^n}^2}{2} = 0$$

On se focalisera sur (SS).

Ces schémas ont un inconvénient majeur : ils sont implicites et non-linéaires !