ISITV-EDPP 2014

Examen - Documents autorisés.
Durée: 2 heures.

1. On suppose régulière les fonctions réelles u et v définies sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$. On notera Γ le bord de Ω.
A l'aide des formules de Green, vérifier que

$$\int_\Omega \Delta u(x)\ v(x)\ dx = \int_\Omega \Delta v(x)\ u(x)\ dx + \int_\Gamma \partial_n u\ v\ d\gamma - \int_\Gamma \partial_n v\ u\ d\gamma.$$

2. On considère le problème d'évolution suivant

$$\begin{array}{l} \partial_t u(t,x) + \Delta v(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \\ \partial_t v(t,x) - \Delta u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \\ \partial_n u(t,x) = \partial_n v(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Gamma \\ u(0,x) = u_0(x);\ v(0,x) = v_0(x),\ x \in \Omega. \end{array}$$

En multipliant la première équation par u, la seconde par v, en sommant et en intégrant sur Ω, montrer formellement que

$$\int_\Omega |u(t,x)|^2 + |v(t,x)|^2\ dx = \int_\Omega |u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2\ dx,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. Ce problème admet-il une solution stationnaire non triviale? A quoi peut-on s'attendre quant au comportement asymptotique en temps de la solution?

4. On propose le schéma numérique en temps suivant, de pas δt:

$$\begin{array}{l} \dfrac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\delta t} + \Delta \dfrac{v^{n+1}(x) + v^n(x)}{2} = 0,\ x \in \Omega \\ \dfrac{v^{n+1}(x) - v^n(x)}{\delta t} - \Delta \dfrac{u^{n+1}(x) + u^n(x)}{2} = 0,\ x \in \Omega \\ \partial_n u^{n+1}(x) = \partial_n v^{n+1}(x) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Gamma \\ u^0(x) = u_0(x);\ v^0(x) = v_0(x),\ x \in \Omega. \end{array} \tag{1}$$

Quel est le nom de ce schéma? Quel est l'ordre d'approximation de ce schéma? (Le justifier: bonus).

5. Montrer que

$$\int_\Omega |u^n(x)|^2 + |v^n(x)|^2\ dx = \int_\Omega |u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2\ dx,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Que peut-on en déduire en terme de stabilité numérique?

6. Ecrire une formulation faible du problème (1).

7. On suppose $d = 1$ et $\Omega =]0, 1[$. Réécrire la formulation faible pour un espace d'approximation $W_h = V_h \times V_h$, basée sur la méthode élément fini $\mathbb{P}_1$-conforme.

8. On suppose que (u_0, v_0) appartient à W_h. Montrer que que la solution approchée (u_h^n, v_h^n) vérifie
$$\int_\Omega |u_h^n(x)|^2 + |v_h^n(x)|^2 \, dx = \int_\Omega |u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2 \, dx, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

9. On note $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq m}$ une base de V_h et
$$u_h^n(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i^n \phi_i(x), \ \ v_h^n(x) = \sum_{i=1}^{m} v_i^n \phi_i(x).$$
Expliciter le lien entre m et la discrétisation choisie de $\Omega =]0, 1[$.

10. On note $w_{2i-1} = u_i$ et $w_{2i} = v_i$. Expliciter la construction du système linéaire permettant de construire $W^{n+1} = (w_i^{n+1})_{1 \leq i \leq 2m}$ en fonction de W^n.

11. La matrice du système linéaire se décompose en $A + B$ avec A qui discrétise $\frac{1}{\delta t} Id$. La matrice B est-elle symétrique? Anti-symétrique? Justifier la réponse.

12. Donner l'algorithme de construction de W^{50}.