SEATECH-M2 Math-EDPP 2015

Examen - Documents autorisés.
Durée: 2 heures.

Trois exercices bien faits conduisent à une (très) bonne note.

1. Soit le code source matlab suivant:

```
L=12;
a=1;
b=11;
Tf=1;
dt=0.02;
N=200;
h=L/(N+1);
Id=diag(sparse(ones(N,1)),0);
DELTA=2*Id-diag(sparse(ones(N-1,1)),-1)-diag(sparse(ones(N-1,1)),1);
DELTA=DELTA/h^2;
M=Id+dt*DELTA;
df=[dt/h^2*a;  zeros(N-2,1);dt/h^2*b];
U=a*ones(N,1);
U(N/4:N,1)=b;
for  t=dt:dt:Tf
     U=M\(U+df);
end
```

   (a) Décrire précisément le schéma numérique et le problème d'évolution que ce code résoud.

   (b) Faire un graphe du vecteur U obtenu à la fin du code.

2. On suppose régulière les fonctions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, à valeur $\mathbb{R}^3$, définies sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^3$. On notera Γ le bord de Ω.
   Etablir la formule de Green pour l'intégrale suivante

$$\int_\Omega \nabla \times \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x)\, dx,$$

   où $\nabla\times$ désigne le rotationel (gradient produit vectoriel de la quantité vectorielle).

3. Soit A B et C trois matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$U'(t) = AU(t) + BU(t) + CU(t).$$

   (a) Estimer l'erreur du schéma de splitting $U_{n+1} = \exp(\tau A)\exp(\tau B)\exp(\tau C)U_n$.

   (b) Ecrire sous forme d'équation différentielle ce schéma de splitting.

4. On suppose donné un tableau AR de taille $(Na, 2)$ à valeur entière qui rend les deux indices des triangles numérotés d'un maillage, séparé par l'arête considérée de numéro compris entre 1 et Na. Ce tableau ne concerne que les arêtes internes du maillage. Le maillage est constitué de triangle équilatéraux de côté h. On attache à l'orthocentre de chaque triangle la variable scalaire $u(i)$ où i est le numéro du triangle.

   (a) Calculer une approximation différence finie de $\nabla u \cdot n$ sur l'arête d'indice i, où n est la normale unitaire pointant de $AR(i, 1)$ vers $AR(i, 2)$.

   (b) Le but est maintenant de trouver une approximation volume finie de l'équation suivante

$$- \Delta u(x, y) = \text{div } F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\partial_n u_{|\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

   où F est un vecteur nul sur le bord $\partial\Omega$ de Ω (domaine maillé par les triangles équilatéraux). Pour cela, on considèrera pour chaque volume de contrôle, les triangles du maillage.
   -Trouver la taille de la matrice du système linéaire sous-jacent.
   -Ecrire l'algorithme de construction de la matrice du système.
   -On suppose qu'on dispose d'un vecteur VF de taille le nombre d'arête représentant $F \cdot n$ sur chaque arête, avec n la normale unitaire de $AR(i, 1)$ vers $AR(i, 2)$. Ecrire le second membre du système.

   (c) Justifier l'existence et l'unicité, en un sens à préciser, de la solution de (1)(2). (Master math seulement).

5. On considère le modèle

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t, x) - \text{div } F(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\
&F(t, x) - \epsilon \Delta F(t, x) = \nabla u(t, x), \ (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\
&(F \cdot n\, n + \epsilon F) = 0, \ (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega.
\end{aligned}$$

   (a) Quel est ce modèle lorsque $\epsilon = 0$? Comment interpréter ce modèle lorsque $\epsilon > 0$?

   (b) Montrer formellement que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|_{L^2}^2 + |F|_{L^2}^2 + \epsilon |\nabla F|_{L^2}^2 = 0.$$

   (c) En déduire la décroissance de $|u|_{L^2}^2$ au cours du temps.

   (d) Trouver un schéma numérique en temps adapté à ce problème.