2018-2019

Equations Différentielles

Notes de cours largement inspirées d'un cours de Pierre Fabrie (Université de Bordeaux).

1. Organisation et contact

- 8 séances de Cours 2h
- 8 séances de TD 2h
- 1 CC+QCM ?
- 1 CT

Responsable du cours

Cédric Galusinski
@ galusins@univ-tln.fr
☎ 04 89 16 66 33
bâtiment M, 1ᵉʳ étage, bureau 115
http://galusins.univ-tln.fr

Chargés de TD

Cédric Galusinski

Prérequis

Prérequis

- Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$
- Analyse L2
- Algèbre linéaire L2

2. Résultats Généraux

Définitions

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times E$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans E. (On affaiblira cette hypothèse ultérieurement).

Définition 1

On appelle solution de l'équation différentielle du 1^{er} ordre

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1}$$

tout couple (I, x) tel que

- I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$,
- L'application $x\ : t \in I \mapsto x(t) \in E$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$,
- Le graphe $(t, x(t))_{t \in I}$ est contenu dans Ω,
- $\forall t \in I,\ x'(t) = f(t, x(t))$.

On appelle problème de Cauchy le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

Le couple (t_0, x_0) est la donnée de Cauchy.

Définitions

1. E est l'espace des phases, $t \mapsto x(t)$ est une courbe intégrale de l'équation différentielle ordinaire.
2. Lorsque $\dim E = 1$ on dit que l'équation est scalaire, lorsque $\dim E > 1$ on dit que l'on a un système d'équations différentielles.

   Si on note $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E dans laquelle $f(t,x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x)e_i$, le système différentiel s'écrit

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & f_1(t; x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ x_2'(t) & = & f_2(t; x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n'(t) & = & f_n(t; x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \end{array}$$

Définitions

Plus généralement, une équation différentielle de la forme

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(k-1)}(t)),$$

peut s'écrire sous la forme d'un système d'EDOs (Equation Différentielle Ordinaire) du premier ordre en posant

$$y(t) = (x(t), x'(t), \cdots, x^{(k-1)}(t)) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_k(t)),$$

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_2(t), \\ y_2'(t) & = & y_3(t), \\ \vdots & = & \vdots \\ y_k'(t) & = & f(t, y_1(t), y_2(t), \cdots, y_k(t)), \end{array}$$

le prix à payer est une augmentation de la dimension de l'espace des phases.

Définitions

Définition 2 (Equation différentielle autonome)

L'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ est dite autonome si la fonction f ne dépend pas du temps t. On écrit alors $x'(t) = f(x(t))$.

Définition 3

Soit (I_1, x_1) et (I_2, x_2) deux solutions de $x'(t) = f(t, x(t))$.
On dit que (I_2, x_2) prolonge (I_1, x_1) si $I_1 \subset I_2,\ I_1 \neq I_2$ et $x_{2|I_1} = x_1$.
Une solution est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

Définitions

Définition 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x : t \in I \mapsto x(t) \in E$ une application définie sur I.
On appelle extrémité droite (resp. gauche) du couple (I, x) l'ensemble des couples (t^+, x^+) (resp (t^-, x^-)) où t^+ est l'extrémité droite de I (éventuellement $+\infty$) et x^+ un point d'accumulation de x en t^+ par valeur inférieure :

$$\exists t_k \to t^+,\ x^+ = \lim_{k \to +\infty} x(t_k)$$

(resp t^- est l'extrémité gauche de I et x^- un point d'accumulation de x en t^-. On note $\mathcal{E}^+(I, x)$ l'ensemble des extrémités droites, $\mathcal{E}^-(I, x)$ l'ensemble des extrémités gauches et on pose

$$\mathcal{E}(I, x) = \mathcal{E}^-(I, x) \cup \mathcal{E}^+(I, x)$$

L'ensemble des extrémités droites (resp. gauches) peut être vide.

Exemple 5

1. $I =]0, +\infty[,\ x(t) = \sin \frac{1}{t},\ \mathcal{E}^-(I, x) = \{0\} \times [-1, 1], \mathcal{E}^+(I, x) = \{(+\infty, 0)\}$.
2. $I =]-1, +1[,\ x(t) = \frac{1}{1 - t^2},\ \mathcal{E}(I, x) = \emptyset$.

Cas linéaire scalaire

Théorème 6

Soit I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* a, b *deux applications continues de* I *dans* $\mathbb{R}$.
Alors l'unique solution maximale (J, x) *issue de la donnée de Cauchy* (t_0, x_0) *de l'équation*

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{2}$$

est donnée par $J = I$ *et*

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)ds.$$

Preuve. Supposons qu'il existe une solution (J, x) de (2) dans $(I \times \mathbb{R})$. Posons pour $t \in J$,

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} x(t).$$

Un calcul simple montre que

$$y'(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} b(t)$$
$$y(t_0) = x(t_0).$$

Cas linéaire scalaire

Donc

$$y(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds.$$

Nécessairement,

$$x(t) = x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)ds, \ t \in J.$$

Donc, si la solution existe, elle est unique.
Réciproquement, on pose pour $t \in I$,

$$x(t) = x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)ds.$$

Un calcul immédiat montre que (I, x) est solution.
Tout ceci prouve bien que l'unique solution maximale du problème est (I, x).

Cas linéaire scalaire

Proposition 7

Soient a *et* b *deux fonctions continues et* x *une fonction dérivable définies sur un intervalle* $[t_0, t^+[$ *(*t^+ *éventuellement infini).*
Si pour tout $t \in [t_0, t^+[$ *on a* $x'(t) \leq a(t)x(t) + b(t)$*, alors*

$$\forall t \in [t_0, t^+[, \quad x(t) \leq x(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds.$$

Preuve. On multiplie l'inégalité par $e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau}$ et on intègre sur $[t_0, t[$. ■

Lemme 8 (Lemme de Gronwall)

Soient a *une fonction continue* <u>*positive*</u> *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*,* b *et* x *deux fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* x *vérifie l'inégalité :*

$$\forall t \geq t_0, \; x(t) \leq x_0 + \int_{t_0}^t a(s)x(s)ds + \int_{t_0}^t b(s)ds.$$

Alors,

$$\forall t \geq t_0, \; x(t) \leq x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds.$$

Cas linéaire scalaire

Preuve. Soit

$$h(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} b(s)ds.$$

Alors que la fonction x de départ est seulement supposée continue, la fonction h est par contre de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, par dérivation on obtient, comme a est positif et grâce à l'hypothèse

$$h'(t) = a(t)x(t) + b(t) \leq a(t)h(t) + b(t),$$

ce qui donne d'après la proposition 7

$$h(t) \leq x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)ds,$$

D'où le résultat vu que $x(t) \leq h(t)$. ∎

Cauchy-Lipschitz

Théorème 9 (Cauchy-Lipschitz)

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans E (plus généralement f continue localement lipschitzienne par rapport à x) alors

- *Pour toute donnée de Cauchy (t_0, x_0) dans Ω, il existe une unique solution maximale (I, x) de (1) vérifiant $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$.*
- *De plus, les extrémités de la solution **maximale** (I, x) n'appartiennent pas à Ω : $\mathcal{E}(I, x) \cap \Omega = \emptyset$.*

Définition 10

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, où E est un espace normé, et $f : \Omega \to E$ une application. On note (t, x) un point de $\mathbb{R} \times E$. On dit que f est **localement lipschitzienne en** x si, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert V de ce point et une constante $k > 0$, tels que pour tout (t, x), $(t, y) \in V$, on ait

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq k\|y - x\|.$$

Cauchy-Lipschitz

Définition 11

On appelle **tonneau de sécurité** fermé pour f de centre $(t_0, x_0) \in \Omega$ un ensemble de la forme $T = I \times \overline{B}(x_0, r)$, $r > 0$ contenu dans Ω, avec $I = [t_0 - \ell, t_0 + \ell]$, $\ell > 0$ tel qu'il existe une constante $M > 0$ pour laquelle les deux conditions suivantes soient vérifiées

$$M\ell \leq r$$
$$\|f(t,x)\| \leq M, \qquad (t,x) \in T$$

Proposition 12

Si f *est continue et localement lipschitzienne en* x*, alors, pour tout* $(t_0, x_0) \in \Omega$*, il existe* $k > 0$ *et un tonneau de sécurité* T *de centre* (t_0, x_0)*, tel que* $\overline{T} \subset \Omega$ *et* f *soit* k*-lipschitzienne en* x *au voisinage de* $\overline{T}$.

Comme f est continue, pour $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) contenu dans Ω et une constante $M > 0$ tels que $\|f(t,x)\| < M$ pour tout $(t,x) \in V$. Si, de plus, f est localement lipschitzienne en x, on peut faire en sorte, quitte à réduire V, qu'il existe une constante $k > 0$ telle que f soit k-lipschitzienne en x dans V. Ce choix étant fait, on peut trouver $\beta > 0$, $r > 0$ tels que $[t_0 - \beta, t_0 + \beta] \times \overline{B}(x_0, r)$ soit contenu dans V. Pour satisfaire aux deux affirmations de l'énoncé, on choisit ℓ, $0 < \ell \leq \beta$ pour que $M\ell \leq r$.

Cauchy-Lipschitz

Testez-vous

- Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de E et $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{U}$. Montrer qu'une application $(t, x) \in \Omega \mapsto f(t, x) \in E$, localement Lipschitzienne par rapport à x est globalement Lipschitzienne par rapport à x sur tout compact de Ω.
- Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E. Montrer que toute application $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, E)$ est localement Lipschitzienne.
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathcal{U}, E)$. Montrer que f est localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

Exemple 13

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times E$, $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(E))$, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, E)$. Alors la fonction $f(t, x)$ définie par

$$f(t, x) = A(t)x + g(t)$$

est localement lipschitzienne par rapport à x.

Cauchy-Lipschitz

Théorème 14 (unicité locale)

Soient (I_1, x_1) *et* (I_2, x_2) *deux solutions de l'équation*

$$x'(t) = f(t, x),$$

où f *est localement Lipschitzienne par rapport à* x. *S'il existe* $t_0 \in I_1 \cap I_2$ *tel que* $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, *alors*

$$\forall t \in I_1 \cap I_2,\ x_1(t) = x_2(t).$$

Preuve. On montre que l'ensemble J des points t de $I_1 \cap I_2$ pour lesquels $x_1(t) = x_2(t)$ est non vide ($t_0 \in J$), ouvert et fermé dans le connexe $I_1 \cap I_2$.

- L'ensemble J est fermé par continuité de l'application $t \mapsto x(t) - y(t)$.
- J est ouvert : Soit $t_1 \in J$, comme f est localement Lipschitzienne par rapport à x, il existe une boule $B_{T,R} \subset I_1 \cap I_2 \times B(x_1(t_1), R)$ centrée en $(t_1, x_1(t_1)) = (t_1, x_2(t_1))$, sur laquelle f est Lipschitzienne par rapport à x.

Cauchy-Lipschitz

Or, en intégrant l'équation différentielle par rapport à t, il vient

$$x_1(t) = x_1(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, x_1(s))ds,$$
$$x_2(t) = x_2(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, x_2(s))ds.$$

et ainsi il vient

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \|x_1(t_1) - x_2(t_1)\| + \int_{t_1}^{t} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|ds \\ &\leq \|x_1(t_1) - x_2(t_1)\| + k_B \int_{t_1}^{t} \|x_1(s) - x_2(s)\|ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, il vient

$$\forall t,\ |t - t_1| \leq T,\ \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_1(t_1) - x_2(t_1)\| e^{k_B |t - t_1|}.$$

Ainsi, comme $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ il vient $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in]t_1 - T, t_1 + T[$. Ce qui prouve que J est bien ouvert.
Au final, par connexité, il vient $J = I_1 \cap I_2$. ■

Cauchy-Lipschitz

Théorème 15 (Existence du prolongement maximal)

Toute solution (I, x) *de*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

se prolonge en une unique solution maximale.

Preuve. Soit (I_λ, x_λ) l'ensemble des prolongements de (I, x) alors si $J = \bigcup_\lambda I_\lambda$ et si x est définie par $x(t) = x_{|I_\lambda}$, $t \in I_\lambda$, (J, x) est solution maximale. L'unicité a été faite précédemment. ■

Cauchy-Lipschitz

Théorème 16 (Existence locale pour le problème de Cauchy)

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$, f *localement Lipschitzienne par rapport à* x. *Alors pour toute donnée de Cauchy* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *il existe au moins une solution* (I, x) *de l'équation différentielle* $x'(t) = f(t, x(t))$ *issue de* (t_0, x_0).

Preuve. Soit $\mathcal{T} = \{(t, y), |t - t_0| \leq T, \ |y - x_0| \leq R\}$ un cylindre inclus dans Ω centré en (t_0, x_0) et k la constante de Lipschitz de f sur $\mathcal{T}$. Soit $M = \sup_{\mathcal{T}} \|f(t, x)\|$. Soit $T_1 \leq T$ assez petit pour que $MT_1 \leq R$, $kT_1 \leq \alpha < 1$. Soit F l'espace de Banach,

$$F = \mathcal{C}^0([t_0 - T_1, t_0 + T_1]\,; \ \overline{B}(x_0, R)).$$

On va construire dans F une solution par la méthode de point fixe.

Cauchy-Lipschitz

On définit par récurrence

$$\begin{aligned} x^0(t) &= x_0, \\ x^{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^n(s))ds. \end{aligned}$$

On va montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $t \mapsto x_n(t) \in F$ et que la suite $(x_n)_n$ ainsi construite converge dans F.
Par récurrence x^n est clairement continue pour tout n. De plus

$$\|x^{n+1}(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x^n(s))\| ds \leq M|t - t_0| \leq MT_1 \leq R.$$

De plus, comme x_n et x_{n-1} appartiennent à F, on a

$$\begin{aligned} \|x^{n+1}(t) - x^n(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x^n(s)) - f(s, x^{n-1}(s))\| ds \\ &\leq k_B \int_{t_0}^{t} \|x^n(s) - x^{n-1}(s)\| ds \\ &\leq k_B \, |t - t_0| \sup_s \|x^n(s) - x^{n-1}(s)\| \\ &\leq k_B \, T_1 \|x^n - x^{n-1}\|_F. \end{aligned}$$

Cauchy-Lipschitz

On en déduit :

$$\|x^{n+1} - x^n\|_F \leq \alpha \|x^n - x^{n-1}\|_F.$$

Et donc

$$\|x^{n+1} - x^n\|_F \leq \alpha^n \|x^1 - x^0\|_F.$$

Ainsi, la série $\sum_n (x^{n+1} - x^n)$ est convergente dans le Banach F. Ceci prouve bien la convergence de la suite $(x_n)_n$ vers un élément x de F.
Par passage à la limite uniforme dans la définition des (x_n), on constate que la fonction $t \mapsto x(t)$ vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Comme x et f sont continues, on obtient qu'en fait x est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Cauchy-Lipschitz

Théorème 17 (Théorème des extrémités ou bouts)

Soit (I, x) *la solution maximale du problème de Cauchy, alors* $\mathcal{E}(I, x) \cap \Omega = \emptyset$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que la solution maximale (I, x) admette, par exemple, un bout droit (t^+, x^+) (avec $t^+ = \sup(I)$) qui appartienne à Ω. En particulier, ceci implique que $t^+ < +\infty$.
On va montrer que nécessairement x^+ est la limite en t^+ de $x(t)$, puis qu'il existe une solution locale issue de (t^+, x^+) prolongeant strictement (I, x).

Premier pas : Montrons que $x^+ = \lim\limits_{\theta \to t^+} x(t)$.
Soit $B_{T,R} = \{(t, x),\ |t - t^+| \leq T,\ |x - x^+| \leq R\}$ un voisinage de (t^+, x^+) inclus dans Ω.
Soit $M = \sup_{(t,x) \in B_{T,R}} |f(t, x)|$, et ε tel que $\varepsilon \leq T$ et $\varepsilon M \leq \frac{R}{3}$.
Soit $B_\varepsilon = \{(t, x),\ |t - t^+| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ |x - x^+| \leq \frac{R}{2}\}$.
Comme (t^+, x^+) est une extrémité, il existe un temps τ_0 tel que :

$$t^+ - \varepsilon \leq \tau_0 \leq t^+, \text{ et } |x(\tau_0) - x^+| \leq \frac{R}{3}.$$

Cauchy-Lipschitz

1. Montrons que pour tout $t \in [\tau_0, t^+[$, $x(t) \in B(x^+, R)$.
   Si tel n'est pas le cas, on considère τ_1 le premier temps de sortie de $B(x^+, R)$:
   $$\tau_1 = \inf \left\{ \tau \geq \tau_0, |x(\tau) - x^+| \geq R \right\}.$$
   Remarquons que $t^+ - \varepsilon < \tau_1 < t^+$ et que $|x(\tau_1) - x^+| = R$. On a alors :
   $$\forall\, s \in [\tau_0, \tau_1], x(s) \in B(x^+, R),$$
   donc, $\forall\, s \in [\tau_0, \tau_1], |x'(s)| = |f(s, x(s))| \leq M$, ce qui donne en appliquant le théorème des accroissements finis :
   $$|x(\tau_1) - x(\tau_0)| \leq M|\tau_1 - \tau_0| \leq M\varepsilon \leq \frac{R}{3}.$$
   On a alors : $R = |x(\tau_1) - x^+| \leq |x(\tau_1) - x(\tau_0)| + |x(\tau_0) - x^+| \leq \frac{2R}{3}$, absurde.
2. Montrons alors que x a une limite en t^+. En effet, pour tout $t \in [\tau_0, t^+[$, $(t, x(t)) \in B_{T,R}$, et donc $|x'(t)| \leq M$.
   Ainsi, sur l'intervalle semi ouvert $[t_0, t^+[$, la fonction $t \mapsto x(t)$ est Lipschitzienne donc uniformément continue.
   Elle se prolonge ainsi de façon unique en une fonction continue en t^+ (Critère de Cauchy) et par conséquent on a nécessairement $\lim_{t \to t^+} x(t) = x+$ car par définition on sait que x^+ est un point adhérent à $t \mapsto x(t)$ en t^+.

Cauchy-Lipschitz

Deuxième pas. Comme par hypothèse, le bout (t^+, x^+) est dans Ω, d'après le théorème d'existence (th. 16), il existe une solution locale (J, y) à l'équation issue de la donnée de Cauchy (t^+, x^+). Considérons alors la fonction z définie sur $I \cup J$ par

$$z(t) = x(t) \text{ si } t < t^+$$
$$z(t) = y(t) \text{ si } t \geq t^+.$$

Par construction, la fonction $t \mapsto z(t)$ est continue en t^+, et elle admet en t^+ des dérivées à droite et à gauche égales (car elle est solution de l'équation différentielle à gauche et à droite de t^+). Cette fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \cup J$. C'est donc une solution de l'équation différentielle ordinaire qui prolonge strictement (I, x). Ceci contredit l'hypothèse de maximalité de la solution (I, x).

∎

3. Analyse qualitative

Analyse qualitative

Théorème 18

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times E$, *et* f *une application continue, localement lipschitzienne de* Ω *dans* E. *Soit* $(I =]t^-, t^+[, \ x)$ *la solution maximale du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ x'(t) &= f(t, x(t)). \end{aligned}$$

Si la fonction $t \mapsto x(t)$ *est bornée sur tout intervalle borné de* $[t_0, t^+[$, *alors* $t^+ = +\infty$.

Preuve. Supposons t^+ fini, alors par hypothèse la fonction $t \mapsto x(t)$ est bornée sur $[t_0, t^+[$. Donc il existe une suite $(t_n)_n$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = t^+, \ \lim_{n \to +\infty} x(t_n) = x^+.$$

Ainsi (t^+, x^+) est une extrémité droite appartenant à Ω, ce qui contredit la maximalité de (I, x) d'après le théorème 17. ∎

Théorèmes de comparaison

Théorème 19

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$*. Soit l'inégalité différentielle*

$$z'(t) \leq f(t, z(t)), \; z(0) = z_0, \quad t \geq 0$$

et x *la courbe intégrale de* $x'(t) = f(t, x(t))$ *telle que* $x(0) = x_0$*, où* f *est continue localement lipschitzienne en* x*. On suppose que* $z_0 \leq x_0$*.*
Alors, $\forall t \geq 0, \; z(t) \leq x(t)$*.*

Preuve.
La fonction $u(t) = z(t) - x(t)$ vérifie l'inégalité

$$u'(t) \leq g(t)u(t),$$

où g est la fonction continue :

$$g(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t) + \theta(z(t) - x(t))d\theta.$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure que

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t g(s)ds}.$$

Le résultat suit de l'hypothèse $u(0) \leq 0$.

∎

Théorèmes de comparaison

Corollaire 20

Soit f une fonction continue localement lipschitzienne, et z une fonction continue vérifiant :

$$z(t) \leq z_0 + \int_0^t f(s, z(s))ds.$$

On suppose que f est <u>croissante</u> par rapport à son deuxième argument. Soit enfin (I, x) la solution maximale de $x'(t) = f(t, x(t)),\ x(0) = z_0$. Alors,

$$\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+,\ z(t) \leq x(t).$$

Preuve.

Soit $y(t) = z_0 + \int_0^t f(s, z(s))ds$. Par dérivation, on a

$$y'(t) = f(t, z(t)) \leq f(t, y(t)).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème précédent. ■

Théorèmes de comparaison

Pour appliquer les théorèmes de comparaison et le lemme de Gronwall, on pensera à recourir à des estimations dites estimations d'énergie. On pourra multiplier (ou prendre le produit scalaire de) l'équation avec la solution (ou une fonction bien choisie qui dépend de la solution).

Exemple 21

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On considère l'équation différentielle :

$$x'(t) = f(x(t)),$$

   où $(f(x), x) \leq \|x\|^2$. Alors si (I, x) est solution maximale, I est non limité à droite.
2. Soit $x''(t) = -\nabla f(x(t))$, $f \in \mathcal{C}^2(E, \mathbb{R})$, telle que pour tout $x \in E$ on ait $f(x) \geq f_0 \in \mathbb{R}$. Alors si (I, x) est solution maximale, $I = \mathbb{R}$.

Théorèmes de comparaison

Proposition 22 (Gronwall uniforme)

Soit l'inégalité différentielle définie sur $\mathbb{R}^+$ *:*

$$z'(t) \leq a(t)z(t) + b(t).$$

On suppose qu'il existe des constantes k_1, k_2, k_3 *telles que*

$$\forall s \geq 0, \int_s^{s+1} a(\tau)d\tau \leq k_1, \ \forall s \geq 0, \int_s^{s+1} z(\tau)d\tau \leq k_2, \ \forall s \geq 0, \int_s^{s+1} b(\tau)d\tau \leq k_3.$$

Alors z *est uniformément majorée sur* $\mathbb{R}_+$ *et plus précisément*

$$\sup_{s\geq 0} z(s) \leq e^{k_1}(k_3 + \max(z(0), k_2)).$$

Théorèmes de comparaison

Preuve.

1) Pour $s \leq 1$, on a

$$z(s) \leq z(0)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} + \int_0^s e^{\int_u^s a(\tau)d\tau} b(u)du \leq z(0)e^{k_1} + k_3 e^{k_1}.$$

2) Pour $s \geq 1$ et pour tout $t \in [s-1, s]$, on a

$$z(s) \leq z(t)e^{\int_t^s a(\tau)d\tau} + \int_t^s e^{\int_u^s a(\tau)d\tau} b(u)du \leq e^{k_1} z(t) + e^{k_1} k_3.$$

On écrit cette inégalité pour $t \leq s \leq t+1$. Puis on intègre le résultat dans la variable t sur l'intervalle $[s-1, s]$. Il vient pour $s \geq 1$,

$$z(s) \leq e^{k_1} (k_3 + \int_{s-1}^s z(t)dt) \leq (k_2 + k_3)e^{k_1}.$$

D'où le résultat en combinant les deux inégalités obtenues. ∎

Théorèmes de comparaison

Exemple 23

Supposons que nous avons établi les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} y'(t) + z(t) \leq 1, \ \forall t > 0, \\ z'(t) \leq 1 + z^2(t), \ \forall t > 0, \\ 0 \leq y(t) \leq z(t), \ \forall t > 0. \end{cases}$$

Alors on montre (exercice) que y et z sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra établir ce genre d'inégalités depuis le système différentielle non-linéaire, $x(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$x'(t) + Ax(t) = b + F(x(t)),$$

où $b \in \mathbb{R}^n$, A est une matrice symétrique définie positive et F une application non-linéaire sous-quadratique telle que $(F(u), u) = 0$. On introduira $y(t) = \|x(t)\|^2$, $z(t) = \|Bx(t)\|^2$ où $A = B^tB$. Ce résultat est pertinent pour l'estimation sur z en particulier lorsque n est grand et $\|B\|$ grand avec n.(exercice)

Entonnoirs et anti-entonnoirs

Définition 24

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que (I, α) est une barrière inférieure ou sous-solution (resp. supérieure ou sur-solution) si

$$\forall t \in I, \ \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)),$$

resp.

$$\forall t \in I, \ \alpha'(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

Définition 25

Un entonnoir est un triplet (I, α^-, α^+), où (I, α^-) est une barrière inférieure et (I, α^+)une barrière supérieure avec $\forall t \in I, \ \alpha^-(t) \leq \alpha^+(t)$.
Un anti-entonnoir est un entonnoir rétrograde (i.e. Un entonnoir lorsqu'on intègre l'équation pour des t décroissants), soit encore un triplet (I, α^-, α^+) où α^- est une barrière supérieure, α^+ une barrière inférieure avec $\forall\ t \in I, \alpha^-(t) \leq \alpha^+(t)$.

Entonnoirs et anti-entonnoirs

Du théorème de comparaison on déduit :

Proposition 26

Soit (I, α^-) *une barrière inférieure et* (I, x) *une solution telle que*

$$\alpha^-(t_0) \leq x(t_0),$$

alors pour tout $t \geq t_0$, $t \in I$

$$\alpha^-(t) \leq x(t).$$

Proposition 27

Soit (I, α^-, α^+) *un entonnoir et* (I, x) *une solution telle que*

$$\alpha^-(t_0) \leq x(t_0) \leq \alpha^+(t_0),$$

alors pour tout $t \geq t_0$, $t \in I$

$$\alpha^-(t) \leq x(t) \leq \alpha^+(t).$$

Entonnoirs et anti-entonnoirs

Théorème 28

Un anti-entonnoir piège au moins une solution dite solution exceptionnelle. De plus, cette solution est unique sous les hypothèses supplémentaires

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to t^+} \alpha^+(t) - \alpha^-(t) = 0, \\ \textit{et} \\ \partial_x f(t,x) \geq 0 \quad \textit{dans l'anti-entonnoir.} \end{cases} \tag{3}$$

Preuve.
Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t^+$.
Soit z_n^+ (resp. z_n^-) la trajectoire rétrograde issue de $(t_n, \alpha^+(t_n))$ (resp $(t_n, \alpha^-(t_n))$).
Puisque (α^-, α^+) est un entonnoir pour les trajectoires rétrogrades, la proposition précédente nous dit que toutes ces trajectoires restent confinées entre α^- et α^+ et, en particulier, elles ne peuvent exploser en temps fini pour l'équation rétrograde. Donc, elles existent toutes au moins à partir du temps t_0 pour l'équation de départ.

Entonnoirs et anti-entonnoirs

Soit $x_n^+ = z_n^+(t_0)$ (resp. $x_n^- = z_n^-(t_0)$) l'intersection de la droite $x = t_0$ avec la trajectoire rétrograde z_n^+ (resp z_n^-).
Soit $n \geq 0$, comme $z_{n+1}^+(t_{n+1}) = \alpha^+(t_{n+1})$ et que (α^-, α^+) est un entonnoir pour les solutions rétrogrades, on a d'après la proposition précédente

$$\forall t \in [t_0, t_{n+1}], \quad z_{n+1}^+(t) \leq \alpha^+(t).$$

Or, comme la suite t_n est choisie croissante, on a $t_n < t_{n+1}$ et donc on a

$$z_{n+1}^+(t_n) \leq \alpha^+(t_n) = z_n^+(t_n),$$

et donc par comparaison de solutions pour tout t où les deux solutions sont définies on a

$$z_{n+1}^+(t) \leq z_n^+(t),$$

en particulier en $t = t_0$, il vient

$$x_{n+1}^+ \leq x_n^+,$$

et de la même façon on peut montrer que

$$x_{n+1}^- \geq x_n^-.$$

Ainsi, la suite d'intervalles fermés $[x_n^-, x_n^+]$ est décroissante, et donc $\cap_{n=1}^{\infty} [x_n^-, x_n^+] = A$ est un intervalle fermé non vide. Il est alors clair que toute solution de l'équation initiale issue de (t_0, x), $x \in A$ est piégée dans l'anti-entonnoir.

Entonnoirs et anti-entonnoirs

Montrons maintenant que sous l'hypothèse (3), cette solution est unique.
En effet, soient x_1, x_2 deux solutions issues de (t_0, A). Supposons par exemple que $x_1(t_0) > x_2(t_0)$, ce qui implique que pour tout t on ait $x_1(t) > x_2(t)$ (deux trajectoires distinctes ne se coupent jamais). Par application du théoreme fondamental de l'analyse on a

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) &= x_1(t_0) - x_2(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \left(\int_0^1 \partial_x f(\tau, x_2(\tau) + \theta(x_1(\tau) - x_2(\tau))) d\theta \right) (x_1(\tau) - x_2(\tau)) d\tau, \\ &\geq x_1(t_0) - x_2(t_0). \end{aligned}$$

Ainsi on a pour tout t

$$\alpha^+(t) - \alpha^-(t) \geq x_1(t) - x_2(t) \geq x_1(t_0) - x_2(t_0) > 0.$$

Ceci est incompatible avec l'hypothèse $\lim_{t \to t^+} \alpha^+(t) - \alpha^-(t) = 0$.

∎

4. Continuité et dérivabilité par rapport aux données

Continuité et dérivabilité par rapport aux données

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, et Λ un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : (t, x, \lambda) \in \Omega \times \Lambda \to f(t, x, \lambda) \in E$ une application continue, localement lipschitzienne en x.
Pour tout $(t_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \lambda$ on note I_{t_0, x_0, λ_0} l'intervalle de définition de la solution maximale de l'équation $x'(t) = f(t, x, \lambda_0)$ issue de la donnée de Cauchy (t_0, x_0). Enfin, on note $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ la valeur en un point t de cette solution.
On désigne par Σ l'ensemble

$$\Sigma = \{(t, t_0, x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \Lambda,\ t \in I_{t_0, x_0, \lambda_0}\}.$$

On appelle solution globale de $x'(t) = f(t, x, \lambda)$ l'application $\varphi : \Sigma \mapsto E$ qui à (t, t_0, x_0, λ_0) associe $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0)$.
On admet alors les résultats ci-dessous

Proposition 29

L'ensemble Σ est ouvert et φ est une application continue de Σ dans E.

Continuité et dérivabilité par rapport aux données

Proposition 30

Si on suppose que f *est de classe* $\mathcal{C}^k$*, alors* φ *est aussi de classe* $\mathcal{C}^k$*.*

Formules de dérivation

1. Notons $z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda_0}$, alors z est solution de :

$$z'(t) = \partial_x f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0) z(t) + \partial_\lambda f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0),$$
$$z(t_0) = 0.$$

2. Si $Z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}$, alors Z est solution de :

$$Z'(t) = \partial_x f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0) Z(t),$$
$$Z(t_0) = \mathrm{Id}.$$

3. Si $y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_0}$, alors y est solution de :

$$y'(t) = \partial_x f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0) y(t),$$
$$y(t_0) = -f(t_0, x_0, \lambda_0).$$

5. Systèmes linéaires à coefficients constants

Systèmes linéaires à coefficients constants

Soit un système d'équations différentielles ordinaires de la forme

$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \tag{4}$$

où $A \in \mathcal{L}(E, E)$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On a

Théorème 31

Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. *La solution maximale de (4) est* (I, x) *où* x *est donné par*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Preuve.
Par dérivation, on vérifie que $x(t)$ vérifie (4),

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad \frac{d}{dt}e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = Ae^{tA}$$

Le théorème d'unicité assure alors que (I, x) est la solution maximale. ■

Définition 32

L'application $(t, s) \mapsto e^{(t-s)A} = R(t, s)$ s'appelle la résolvante.

Systèmes linéaires à coefficients constants

Notons le résultat,

Lemme 33

Soit $(A, B) \in \mathcal{L}(E, E)^2$ *tels que* $AB - BA = 0$. *Alors* $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Preuve du lemme. Comme A et B commutent, on a la formule du binôme

$$(A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l A^l B^{k-l} = \sum_{l+m=k} C_k^l A^l B^m.$$

En justifiant les calculs ci-dessous par un argument de convergence normale des séries on a :

$$\begin{aligned} e^{(A+B)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{l+m=k} \frac{1}{l!m!} A^l B^m \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{B^l}{l!} \right) &= e^A e^B. \end{aligned}$$

∎

Rappels d'algèbre linéaire

Proposition 34

Toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Proposition 35

Soit $\mathcal{I}$ *l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{C}[X]$ *tels que* $q(A) = 0$. *Alors* $\mathcal{I}$ *est un idéal non vide engendré par un unique polynôme unitaire* m. *Ce polynôme s'appelle le polynôme minimal de* A.

Proposition 36 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit A *une matrice complexe, et* p_A *le polynôme caractéristique de* A. *Alors,* $p_A(A) = 0$.

Proposition 37

Soit q *un polynôme de* $\mathbb{C}[X]$. *On note* $v_p(A)$ *l'ensemble des valeurs propres de* A. *Alors* $v_p(q(A)) = q(v_p(A))$.

Proposition 38

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ *de polynôme minimal* m, *alors*

$$v_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ m(\lambda) = 0\}.$$

Proposition 39

Soient p et q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux (i.e. sans zéros communs). Alors,

$$\ker (pq)(A) = \ker p(A) \oplus \ker q(A).$$

Proposition 40

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, soit m le polynôme minimal de A, $m(\lambda) = \prod_{k=1}^{l} (\lambda - \lambda_k)^{\sigma_k}$. On note $E_k = \ker (A - \lambda_k I)^{\sigma_k}$. Alors,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{l} E_k.$$

Proposition 41

L'entier σ_k est le plus petit entier tel que

$$\ker\,(A-\lambda_k)^{\sigma_k} = \ker\,(A-\lambda_k)^{\sigma_k+1}$$

Rappels d'algèbre linéaire

Proposition 42 (Décomposition de Dunford)

Soit E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Il existe un unique couple* $(d, n) \in \mathcal{L}(E)$ *satisfaisant*

1. d *est diagonalisable,*
2. n *est nilpotent,*
3. $d \circ n = n \circ d$,
4. $f = d + n$.

Rappels d'algèbre linéaire

Preuve.
Existence :
Soit P_f le polynôme caractéristique de f (ou tout autre polynôme annulateur),

$$P_f[X] = (-1)^n \prod_{i=1}^{l} (X - \lambda_i)^{\alpha_i},$$

et $F_i = \ker (f - \lambda_i I)^{\alpha_i}$. D'après ce qui précède,

$$E = \oplus_k F_k.$$

On définit les endomorphismes d et n sur chaque sous espace vectoriel F_k par

$$d(x) = \lambda_k x, \ n(x) = f(x) - d(x)$$

Par construction n laisse F_k invariant, et si on note $n_k = n_{|F_k}$, alors $n_k^{\alpha_k} = 0$. Les endomorphismes d et n commutent sur chaque F_k car $d_k = \lambda_k I$, donc d et n commutent.

Rappels d'algèbre linéaire

Expression des projecteurs :

Méthode explicite pour le calcul des projecteurs Π_k sur $F_k = \ker\,(f - \lambda_k I)^{\alpha_k}$. Soit P un polynôme annulateur de A, $P[X] = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$.

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ s'écrit :

$$\frac{1}{P[X]} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{x_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j}. \tag{5}$$

Soit U_i le polynôme $U_i[X] = \sum_{j=1}^{\alpha_i} x_{i,j}(X-\lambda_i)^{\alpha_i - j}$ et $Q_i[X] = \prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{\alpha_j}$.

Rappels d'algèbre linéaire

Montrons que $\Pi_k = (U_k Q_k)(f)$ est le projecteur cherché.

- En multipliant la décomposition en éléments simples par P on obtient

$$1 = \sum_{i=1}^{s} U_i[X] Q_i[X],$$

d'où en prenant l'image de f,

$$I = \sum_{i=1}^{s} U_i(f) \circ Q_i(f). \tag{6}$$

- Par construction des polynômes U_k et Q_k, pour tout $i \neq j$, P divise le produit $Q_i Q_j$. Par conséquent pour tout $i \neq j$, $\Pi_i \circ \Pi_j = 0$. De plus d'après (6),

$$\Pi_i = \sum_{k=1}^{s} \Pi_i \circ \Pi_k = \Pi_i^2.$$

Donc Π_i est un projecteur.

Rappels d'algèbre linéaire

Montrons que $\text{Im } \Pi_i = F_i$.

1. Soit $y = \Pi_i(x) \in \text{ Im } \Pi_i$.

$$\begin{aligned}(f-\lambda_i I)^{\alpha_i}(y) &= (f-\lambda_i I)^{\alpha_i} \circ Q_i(f) \circ U_i(f)(x)\\ &= U_i(f) \circ P(f)(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

   Donc $\text{Im } \Pi_i \subset F_i$.

2. Réciproquement, soit $x \in F_i = \text{ ker } (f-\lambda_i I)^{\alpha_i}$, d'après (6),

$$x = \sum_{i=1}^{s} \Pi_i(x).$$

   Or pour tout $j \neq i$, $\pi_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ car $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ divise $Q_j[X]$. Donc

$$x = \Pi_i(x) \in \text{ Im } \Pi_i.$$

Il reste à montrer que $\text{ker } \Pi_i = \oplus_{j\neq i} F_j$.
Pour $j \neq i$, $F_j \subset \text{ ker } \Pi_i$ car $(X-\lambda_j)^{\alpha_j}$ divise Q_i. Donc $\oplus_{j\neq i} F_j \subset \text{ ker } \Pi_i$.
Réciproquement, si $x \in \text{ ker } \Pi_i$, alors d'après (6) $x = \sum_{j\neq i} \Pi_j(x) \in \oplus_{j\neq i} F_j$.

Rappels d'algèbre linéaire

❶ **Conséquence fondamentale :**
Mise à part son application pratique, le point précédent montre que le couple (d, n) obtenu plus haut peut s'exprimer comme un polynôme en l'endomorphisme f de départ. En effet, d'après ce qui précède on peut écrire

$$d = \sum_k \lambda_k \Pi_k = \sum_k \lambda_k U_k Q_k(f),$$

$$n = f - d = f - \sum_k \lambda_k U_k Q_k(f).$$

❷ **Unicité de la décomposition :**
Soit (d', n') un autre couple satisfaisant les propriétés souhaitées. Comme d' et n' commutent et que $f = d' + n'$, il est clair que d' et f (resp. n' et f) commutent.
Comme la décomposition (d, n) construite dans la première partie de la preuve est polynômiale en f, on voit que d et d' (resp. n et n') commutent.
De plus on a $f = d + n = d' + n'$ et donc

$$d - d' = n - n'.$$

Or d et d' sont diagonalisables et commutent entre eux, ils sont donc diagonalisables dans la même base. En particulier, l'endomorphisme $d - d'$ est diagonalisable.
De même, n et n' sont nilpotents et commutent entre eux, ainsi leur différence $n - n'$ est aussi nilpotente (formule du binôme).
En conclusion, l'endomorphisme $d - d' = n - n'$ est à la fois diagonalisable et nilpotent, c'est donc l'endomorphisme nul.

Calcul de la résolvante

Théorème 43

Soit E *un espace vectoriel de dimension* N, *et* A *un élément de* $\mathcal{L}(E)$. *On suppose connues les* ℓ *valeurs propres distinctes de* A, $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ *de multiplicités algébriques* $(N_1, N_2, \cdots, N_\ell)$, $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_\ell$. *Pour tout* k *on définit* σ_k *le plus petit entier positif tel que*

$$\mathit{Ker}\ (A - \lambda_k I)^{\sigma_k} = \mathit{Ker}\ (A - \lambda_k I)^{\sigma_k + 1}$$

et on pose

$$E_k = \mathit{Ker}\ (A - \lambda_k I)^{\sigma_k}.$$

Alors, E_k *est stable par* A, *et l'espace vectoriel* E *est somme directe des sous espaces* E_k. *Si* Π_k *désigne le projecteur de* E *sur* E_k *parallèlement à* $\oplus_{j \neq k} E_j$, *alors :*

$$e^{tA} = \sum_k e^{\lambda_k t} \left(I + (A - \lambda_k I)t + \cdots + \frac{(A - \lambda_k I)^{\sigma_k - 1}}{(\sigma_k - 1)!} t^{\sigma_k - 1} \right) \Pi_k \tag{7}$$

Calcul de la résolvante

Soit $E_k = \ker (A - \lambda_k I)^{\sigma_k}$. Alors $A(E_k) \subset E_k$ car $(A - \lambda_k I)^{\sigma_k} A = A(A - \lambda_k I)^{\sigma_k}$. Soit Π_k le projecteur sur E_k parallèlement à $\oplus_{j \neq k} E_j$, et $A_k = \Pi_k \circ A \circ \Pi_k$. Par construction $(A_k - \lambda_k I)^{\sigma_k} = 0$, et donc $\nu_p(A_k) = \{\lambda_k\}$. Soit $\nu_k = \dim E_k$, et $P_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}$ le polynôme caractéristique de A_k. Nécessairement $N_k = \nu_k$. Enfin

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_k e^{tA} \Pi_k \\ &= \sum_k e^{t\lambda_k} e^{t(A_k - \lambda_k I)} \Pi_k. \end{aligned}$$

Or, $(A_k - \lambda_k I)$ est nilpotent d'ordre σ_k donc,

$$e^{t(A_k - \lambda_k I)} = \sum_{\ell \leq \sigma_k - 1} \frac{1}{\ell!} t^\ell (A - \lambda_k I)^\ell.$$

$\blacksquare$

6. Systèmes linéaires d'équations différentielles à coefficients dépendant du temps

Résolvante

Dans ce paragraphe, on considère le système d'EDO suivant (avec $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$)

$$\begin{aligned} & x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \\ & \Omega =]\alpha, \beta[\times E, \\ & A \in \mathcal{C}^0(]\alpha, \beta[; \mathcal{L}(E)),\ f \in \mathcal{C}^0(]\alpha, \beta[; E). \end{aligned} \tag{8}$$

Proposition 44

Par toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in \Omega$ *passe une unique solution* (I, x)*.*
Toute solution maximale est définie sur $]\alpha, \beta[$*.*

Résolvante

Preuve.

1. Existence : L'application $(t,x) \mapsto g(t,x) = A(t)x + f(t)$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à x.
   En effet, elle s'obtient par composition de fonctions continues. De plus, si K est un compact quelconque inclus dans $]\alpha,\beta[$, alors
   $$\forall x, y \in E, \quad \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq \sup_{t\in K} \|A(t)\| \|x - y\|.$$
   Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'EDOpossède une unique solution maximale issue de la donnée de Cauchy (t_0, x_0) définie sur un intervalle $I =]t^-, t^+| \subset]\alpha,\beta[$.
2. Montrons la globalité de la solution *i.e.* que $I =]\alpha,\beta[$.
   Supposons par exemple que $t^+ < \beta$. Soit
   $$k = \max\big(\sup_{t\in[t_0,t^+]} \|A(t)\|, \sup_{t\in[t_0,t^+]} \|f(t)\|\big).$$
   Par intégration de l'EDO puis majoration en norme, l'application du lemme de Gronwall conduit à
   $$\|x(t)\| \leq e^{k(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} k e^{k(t-s)} ds$$
   Ainsi $t \mapsto x(t)$ est bornée $\forall t < t^+$, par compacité on a que (I, x) possède au moins un bout droit (t^+, x^+). Comme par hypothèse $t^+ < \beta$, l'hypothèse de maximalité est contredite d'après le théorème des bouts.

■

Résolvante

Proposition 45

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système homogène $x'(t) = A(t)x(t)$ est un espace vectoriel de même dimension que E.

Preuve. Soit Π_t (pour $t \in I$) l'application de $\mathcal{S}$ dans E définie par $\Pi_t(\varphi) = \varphi(t)$. $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel (par linéarité de l'EDO) et Π_t est une bijection linéaire de $\mathcal{S}$ sur E. (On montre l'injectivité de Π_t par l'unicité de la solution de l'EDO). ■

Définition 46

On appelle résolvante du système $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$ l'application R de $I \times I \mapsto \mathcal{L}(E)$ définie par $R(t,s) = \Pi_t \circ \Pi_s^{-1}$

Proposition 47

Soit (I, x) la solution valant x_0 au point s, alors

$$x(t) = R(t,s)(x_0).$$

Résolvante

Preuve. Il suffit d'écrire, comme $x(s) = x_0$,

$$\begin{array}{rclcl} R(t,s)x_0 & = & R(t,s)\Pi_s(x) & = & \Pi_t(\Pi_s^{-1}(\Pi_s(x))) \\ & = & \Pi_t(x) & = & x(t). \end{array}$$

■

Proposition 48

On a les propriétés suivantes

$$\begin{array}{l} R(t,t) = I \\ R(t,s) \circ R(s,\tau) = R(t,\tau) \\ R(t,s) \text{ est inversible et } R(t,s)^{-1} = R(s,t) \end{array}$$

Preuve.

$$\begin{array}{l} \Pi_t \circ \Pi_t^{-1} = I \\ R(t,s) \circ R(s,\tau) = \Pi_t \circ \Pi_s^{-1} \circ \Pi_s \circ \Pi_\tau^{-1} = \Pi_t \circ \Pi_\tau^{-1} = R(t,\tau), \\ R(t,s)^{-1} = (\Pi_t \circ \Pi_s^{-1})^{-1} = \Pi_s \circ \Pi_t^{-1} = R(s,t). \end{array}$$

■

Résolvante

Remarques :

1. Dans le cas d'une EDO du type

$$E = \mathbb{R},\ a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}),\ x'(t) = a(t)x(t),$$

la résolvante se calcule explicitement par

$$R(t, s) = e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}$$

2. Dans le cas d'un système différentiel <u>autonome</u> du type

$$E = \mathbb{R}^n,\ x'(t) = Ax(t),$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ indépendante du temps, on a

$$R(t, s) = e^{(t-s)A} \left(= e^{\int_s^t A d\tau} \right)$$

3. **ATTENTION :** Pour les sytèmes d'EDO non autonomes, on ne sait pas calculer la résolvante en général et en particulier

$$R(t, s) \neq e^{\int_s^t A(\tau)d\tau}$$

Exercice : Expliciter la résolvante dans le cas où $A(t)$ et $\int_0^t A(s)\,ds$ commutent pour tout t.

Résolvante

Proposition 49

L'application $t \mapsto R(t, t_0)$ *est dérivable et vérifie l'équation différentielle suivante (à valeurs dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*)*

$$\frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t) \circ R(t, t_0)$$

$$R(t_0, t_0) = I$$

Preuve. Pour tout $x_0 \in E$, si x est la solution de l'équation différentielle pour la donnée de Cauchy (t_0, x_0), on a vu que

$$R(t, t_0) x_0 = x(t). \tag{9}$$

En particulier, si $(e_1, ..., e_n)$ désigne la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), on obtient que pour tout i l'application

$$t \mapsto R(t, t_0) e_i,$$

est dérivable. Autrement dit, la i-ième colonne de la matrice $R(t, t_0)$ est dérivable par rapport à t, ce qui montre bien la dérivabilité de l'application $t \mapsto R(t, t_0)$.

Résolvante

Soit $x_0 \in E$ quelconque, en dérivant $R(t, t_0)x_0 = x(t)$ par rapport au temps, il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R(t, t_0))x_0 &= \frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) \\ &= A(t) \circ R(t, t_0)x_0. \end{aligned}$$

A t fixé cette identité est valable pour tous les x_0, ce qui montre bien que

$$\frac{d}{dt}R(t, t_0) = A(t) \circ R(t, t_0).$$

■

Remarque 50

La formule $R(t, s) = R(t, t_0) \circ R(s, t_0)^{-1}$ *fournit la dérivabilité par rapport aux deux variables* t *et* s.

Résolvante

Proposition 51

Soit le système

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \\ x(s) = x_0. \end{cases}$$

Alors (formule de Duhamel)

$$x(t) = R(t,s)x_0 + \int_s^t R(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

Preuve. On pose $z(t) = R(t,s)x_0 + \displaystyle\int_s^t R(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma$. On a :

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{d}{dt}R(t,s)x_0 + R(t,t)f(t) + \int_s^t \frac{d}{dt}R(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ &= A(t)R(t,s)x_0 + f(t) + \textstyle\int_s^t A(t)R(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ &= A(t)\left(R(t,s)x_0 + \textstyle\int_s^t R(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma\right) + f(t) \\ &= A(t)z(t) + f(t) \end{aligned}$$

De plus, $z(s) = R(s,s)x_0 = x_0$, donc x et z satisfont le même problème de Cauchy, et par unicité, $x = z$. ■

Résolvante

Définition 52

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ une base de $\mathcal{S}$. L'ensemble $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ s'appelle un système fondamental de solutions. On appelle $W(t) = \text{ Mat } (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))$ la matrice wronskienne du système fondamental de solutions consdiéré, et $w(t) = \text{ det } W(t)$ est le wronskien de ce système.

Proposition 53

On a

$$R(t,s) = W(t)W(s)^{-1}$$

Preuve. Par définition de la résolvante on a $\varphi_k(t) = R(t,s)\varphi_k(s)$. Ainsi $W(t) = R(t,s)W(s)$. Comme $W(s)$ est inversible, on a $R(t,s) = W(t)W(s)^{-1}$.

∎

Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre n

Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre n

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on considère l'équation

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_n(t)x(t) = b(t)$$

Pour traiter ces équations, on se ramène toujours à un système différentiel de dimension n d'ordre 1, en posant

$$Y(t) = (x(t), x'(t), \cdots, x^{n-1}(t))^t,$$

Il vient de façon immédiate

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & & & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre n

Démarche générale :

1. On construit un système fondamental de solutions
2. On en déduit le Wronskien $W(t)$
3. de $W(t)$ et $W(t)^{-1}$on déduit la résolvante $R(t, s)$
4. on obtient la solution par la formule de Duhamel

$$x(t) = R(t, s)x_0 + \int_s^t R(t, \sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

7. Stabilité

Définitions

On note $(I_{x_0}, \varphi(t, t_0, x_0))$ la solution maximale du système $x'(t) = f(t, x(t))$ issue de la donnée de Cauchy (t_0, x_0).

Définition 54

Soit $\psi : \mathbb{R}^+ \to E$ une trajectoire, i.e. vérifiant $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$ pour tout $t \geq 0$. La trajectoire ψ est dite stable au sens de Liapounov si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall t_0 \geq 0,\ \exists \delta > 0, \forall\, x_0 \in E,$$

$$\|x_0 - \psi(t_0)\| \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} [t_0, +\infty[\subset I_{x_0}, \\ \text{et} \\ \forall t \geq t_0,\ \|\varphi(t, t_0, x_0) - \psi(t)\| < \varepsilon. \end{cases}$$

La trajectoire ψ est dite uniformément stable au sens de Liapounov si δ ne dépend pas de t_0.
On dit que ψ est instable si elle n'est pas stable.

Exemple 55

La solution $(\mathbb{R}^+, t \to 1)$ de l'équation $x' + x = 1$ est uniformément stable.
La solution $(\mathbb{R}^+, t \to (0, 0))$ de l'équation $x'' + x = 0$ est uniformément stable.

Définitions

Définition 56

La trajectoire ψ est dite attractive si et seulement si

$$\forall t_0 \geq 0,\ \exists \eta > 0, \forall\, x_0 \in B(\psi(t_0), \eta),\ \lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t, t_0, x_0) - \psi(t)\| = 0,$$

ce qui se traduit par

$$\forall t_0 \geq 0,\ \exists \eta > 0, \forall\, x_0 \in B(\psi(\theta_0), \eta),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists T,\ \forall t \geq t_0 + T,\ \|\varphi(t, t_0, x_0) - \psi(t)\| < \varepsilon.$$

La trajectoire ψ est uniformément attractive si elle est attractive, si η ne dépend pas de t_0, et si T ne dépend ni de t_0, ni de x_0.

Exemple 57

La solution $(\mathbb{R}^+, t \to 0)$ de $x' + x = 0$ est uniformément attractive.

Définition 58

La trajectoire ψ est asymptotiquement stable si elle est stable et attractive. Elle est uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et uniformément attractive.

Cas des systèmes linéaires

Soit le système

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{10}$$

où $t \mapsto A(t)$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 59

La solution $(\mathbb{R}, 0)$ du système (10) est uniformément stable si et seulement si l'ensemble des trajectoires est borné.

Preuve. Une solution de (10) s'écrit $x(t) = R(t,0)x_0$. Ainsi si toute trajectoire est bornée, la résolvante $R(t,0)$ est bornée. Soit M une borne de cette résolvante, alors pour $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$, on a

$$\|x_0 - \psi(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|R(t,0)(x_0 - \psi(t_0))\| \leq \varepsilon.$$

La réciproque est triviale. ∎

Cas des systèmes linéaires

Proposition 60

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\mathcal{R}e\,(\mathrm{Spec}(A)) \subset \mathbb{R}^\star_-$. Alors il existe des constantes strictement positives M, a et un entier ℓ telles que l'on ait l'estimation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall x_0 \in E,\ \|e^{t\,A}x_0\| \le Me^{-ta}\left(1+|t|^\ell\right)\|x_0\|.$$

Aussi, existe-t-il des constantes strictement positives M', a' telles que l'on ait l'estimation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall x_0 \in E,\ \|e^{t\,A}x_0\| \le M'e^{-ta'}\|x_0\|.$$

Preuve. On a :

$$e^{tA}x_0 = \sum_k \sum_{j\le\sigma_k-1} e^{t\lambda_k}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda_k\,I)^j\Pi_k(x_0).$$

Soit $a = -\sup_k \mathcal{R}e(\lambda_k)$, et $M = \sum_k \sum_{j\le\sigma_k-1} \frac{\|A-\lambda_k\,I\|^j}{j!}$. Alors pour tout $t \ge 0$, on a

$$\|e^{tA}x_0\| \le \sum_k \sum_{j\le\sigma_k-1} e^{-ta}\frac{t^j}{j!}\|A-\lambda_k\,I\|^j \sup_k \|\Pi_k(x_0)\| \le Me^{-ta}\left(1+|t|^\ell\right)\|x_0\|.$$

■

Cas des systèmes linéaires

Corollaire 61

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $\mathcal{R}e\,(\mathrm{Spec}(\,(A))) \subset \mathbb{R}_-$. Si de plus les valeurs propres de partie réelle nulle sont de multiplicité 1, alors la solution $(\mathbb{R}, 0)$ de $x' = Ax$ est stable.

Preuve. Quitte à réordonner les valeurs propres, on peut supposer que celles de partie réelle nulle sont pour $k \geq N_1 + 1$, on les note $\lambda_k = i\mu_k$. On a

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{j \leq \sigma_k - 1} e^{t\lambda_k} \frac{t^j}{j!}(A - \lambda_k I)^j \Pi_k + \sum_{k=N_1+1}^{N_2} e^{i\mu_k t}\Pi_k.$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$

$$\|e^{tA}x_0\| \leq Me^{-\alpha t}(1 + t^{k_0}) \sum_{k=1}^{N_1} \|\Pi_k x_0\| + \sum_{k=N_1+1}^{N_2} \|\Pi_k x_0\| \leq C\|x_0\|.$$

■

On remarque que $\lim_{t \to +\infty} e^{tA}x_0 \neq 0$ dès que $\Pi_k x_0 \neq 0$ pour $k \geq N_1 + 1$. En effet, dans ce cas on a

$$\Pi_k e^{tA} x_0 = e^{i\mu_k t}\Pi_k x_0,$$

et donc

$$\|e^{tA}x_0\| \geq \|\Pi_k e^{tA}x_0\| = |e^{i\mu_k t}|\|\Pi_k x_0\| = \|\Pi_k x_0\| > 0.$$

Cas des systèmes linéaires

Corollaire 62

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ *satisfaisant* $\mathcal{R}e\,(\mathrm{Spec}(A)) \subset \mathbb{R}_-^\star$, *soit* f *une application de* $\mathbb{R} \times E$ *dans* E *satisfaisant* $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon(x)\|x\|$, *avec* $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. *Alors si la donnée de Cauchy* x_0 *est suffisamment petite, la solution de*

$$x'(t) = Ax(t) + f(t,x), \ \ x(0) = x_0$$

est globale, et vérifie $\|x(t)\| \leq e^{-ct}\|x_0\|$ *pour une certaine constante* $c > 0$. *Autrement dit la trajectoire* $t \mapsto 0$ *est uniformément asymptotiquement stable.*

Preuve. D'après la dernière proposition, il existe deux constantes strictement positives α et M telles que $\|e^{tA}\|$ soit majoré par $Me^{-\alpha t}$, pour tout $t \geq 0$. Ainsi,

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|x_0\| + M\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\|\varepsilon(x(s))\|\|x(s)\|ds.$$

Cas des systèmes linéaires

On pose $\delta = \dfrac{\alpha}{4M}$. Soit $\eta > 0$ tel que $\|x\| \leq \eta \Longrightarrow \|\varepsilon(x)\| \leq \delta$. On pose alors $r_0 = \dfrac{\eta}{4M}$. Si x_0 est dans la boule $B(0, r_0)$, alors :

$$\forall\, t \geq 0, \quad x(t) \in B(0, \eta).$$

En effet, dans le cas contraire, soit t_1 le premier instant où x sort de la boule. Alors

$$\|x(t_1)\| \leq M r_0 + \frac{M\delta}{\alpha}\eta \leq \frac{\eta}{2},$$

ce qui est absurde. Donc, on vient de montrer que pour x_0 assez petit, $x \in B(0, \eta)$. Donc la solution x est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Ceci implique que la solution maximale est définie sur un intervalle contenant $\mathbb{R}_+$, et est bornée. Reprenant l'inégalité précédente on a alors :

$$\|x(t)\| \leq M\|x_0\|e^{-\alpha t} + M\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\varepsilon\|x(s)\|ds.$$

Posons alors $y(t) = e^{\alpha t}\|x(t)\|$. La fonction y vérifie l'inégalité

$$y(t) \leq M\|x_0\| + \int_0^t \frac{\alpha}{4} y(s)ds$$

ce qui donne par le lemme de Gronwall

$$y(t) \leq M\|x_0\|e^{\frac{\alpha}{4}t},$$

d'où

$$\|x(t)\| \leq M\|x_0\|e^{-\frac{3\alpha}{4}t},$$

ce qui montre que $x(t) \to 0$ quand t tends vers $+\infty$. ■

Méthode de Liapounov

On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ où f est localement lipschitzienne dans $[0, +\infty[\times E$, et vérifie $f(t, 0) = 0$. Dans toute la suite $V(t, x)$ désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un voisinage de $[0, +\infty[\times E$ telle que $V(t, 0) = 0$.

Définition 63

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E contenant l'origine. Une fonction W de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ est dite définie positive si

1. W est de classe $\mathcal{C}^1$
2. $W(0) = 0$
3. $\forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\},\ W(x) > 0$

Méthode de Liapounov

Définition 64

(extension à la dépendance en t)

La fonction V définie de $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}_+$ est dite définie positive s'il existe une fonction W de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie positive telle que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E$, on a $V(t, x) \geq W(x)$.

Exemple 65

$$V(t, x) = \|x\|^\alpha, \ \ \alpha > 1$$

$$V(t, x, y) = x^2 + y^2 + xy \cos(t)$$

Remarque 66

Dans le cas autonome il suffit de supposer V strictement positive dans un voisinage de l'origine privé de 0.

Méthode de Liapounov

Définition 67

Une fonction V est une fonction de Liapounov pour l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ si V est définie positive et si $t \mapsto V(t, x(t))$ est décroissante pour toute solution $t \mapsto x(t)$ de l'équation. Autrement dit si V décroit sur la trajectoire $t \mapsto x(t)$. La définition ci-dessus s'adapte sans difficulté au cas autonome.

Remarque 68

Soit $t \mapsto x(t)$ *une trajectoire de* $x'(t) = f(t, x(t))$ *supposée définie sur* $\mathbb{R}_+$. *Alors*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x(t)) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{dx}{dt} . \nabla_x V(t, x(t)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + f(t, x(t)) . \nabla_x V(t, x(t)) \end{aligned}$$

Dans les applications on remplace la condition donnée par la définition précédente par

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}, \ \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + f(t, x) \nabla_x V(t, x) \leq 0.$$

Méthode de Liapounov

Définition 69

On dit que la fonction V est une fonction de Liapounov stricte si V est une fonction de Liapounov et si la fonction

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial t} + f(t,x)\nabla_x V\right)$$

est définie positive.

Théorème 70

Soit l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ *où* $f(t,0) = 0$. *S'il existe une fonction de Liapounov définie sur* $\mathbb{R}_+ \times B(0,r)$ *pour le système précédent, alors la solution* $(\mathbb{R}, 0)$ *est stable.*

Preuve. Soit $V(t,x)$ la fonction de Liapounov et $W(x)$ la fonction définie positive telle que $W(x) \leq V(t,x)$. Soit $r > 0$, on définit

$$\varepsilon = \inf\{W(x),\ \|x\| = r\} > 0,$$

et $r_0 < r$ tel que $\forall\, x_0 \in B(0, r_0)$, $V(0, x_0) \leq \varepsilon/2$. Soit $x_0 \in B(0, r_0)$, alors par continuité, il existe $t_1 > 0$ tel que pour tout $t < t_1$, $x(t)$ reste dans $B(0, r)$.

Méthode de Liapounov

Montrons qu'en fait, $x(t) \in B(0,r)$ pour tout $t \geq 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas, il existe alors un premier temps $t_2 > t_1$ tel que $\|x(t_2)\| = r$ et donc par définition de ε, on a

$$W(x(t_2)) \geq \varepsilon.$$

Mais par ailleurs, par définition d'une fonction de Liapounov on a

$$V(t_2, x(t_2)) \leq V(0, x(0)) = V(0, x_0) \leq \varepsilon/2,$$

ce qui est impossible car on doit avoir

$$W(x(t_1)) \leq V(t_1, x(t_1)).$$

$\blacksquare$

Méthode de Liapounov

Théorème 71

Sous les hypothèses du théorème précédent, si on suppose de plus que la fonction de Liapounov est stricte alors la solution $(\mathbb{R}, 0)$ est asymptotiquement stable.

Preuve. On sait déjà que la solution est stable. On commence par donner une démonstration dans le cas autonome. On pose $W_1(t) = W(x(t))$ où W est la fonction de Liapounov. Soit $l = \lim\limits_{t \to +\infty} W_1(t)$ (W_1 étant décroissante, cette limite existe). Il suffit de montrer que $l = 0$. Si l est non nulle, comme $W_1(t) \geq 0$, il existe nécessairement α strictement positif tel que $\forall t$, $W_1(t) \geq \alpha$, donc il existe $\rho > 0$, que l'on peut supposer plus petit que r, tel que $\forall t \geq 0$, $\|x(t)\| \geq \rho$. Dans le compact $\overline{B(0,r)} \setminus B(0,\rho)$ la fonction W_2 est minorée par une constante $m > 0$. Ainsi

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t)) \leq -m$$

Méthode de Liapounov

On obtient alors,

$$0 \leq W_1(t) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) - m(t - t_0).$$

Donc $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} W_1(t) = -\infty$ ce qui est absurde. Donc $l = 0$.
Dans le cas non autonome, la démonstration précédente montre que l'on a seulement $\liminf\limits_{t \mapsto +\infty} W_1(t) = 0$. En effet, la fonction $W_1(t)$ n'est pas *a priori* décroissante et on n'est donc pas certain qu'elle ait une limite. Ceci signifie en particulier que pour tout ε, il existe un instant t_ε pour lequel $\|x(t_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$. Mais comme la trajectoire $t \mapsto x(t)$ est stable ceci assure que $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} x(t) = 0$.

■

Méthode de Liapounov

Exemple

Soit le système

$$\frac{dx}{dt} + Ax(t) = f(t, x(t))$$

où $f(t,x) = \varepsilon(x)\|x\|$, et $\mathcal{R}e(Spec(A)) \geq \alpha > 0$. Soit

$$B = \int_0^{+\infty} e^{-sA^t} e^{-sA} ds.$$

Alors la fonction $V(x) = (Bx, x)$ est une fonction de Liapounov pour le système précédent.
En effet, on va montrer que la matrice B vérifie $BA + A^tB = Id$.

Pour voir cela, on remarque d'abord que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-s\,A^t} e^{-s\,A} ds$ est bien définie puisque $\mathcal{R}e(Spec(A)) \geq \alpha > 0$. De plus

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-sA^t} e^{-sA}\right) = -e^{-sA^t}\left(A^t + A\right) e^{-s\,A}.$$

Et donc

$$BA + A^tB = \int_0^{+\infty} e^{-s\,A^t}\left(A^t + A\right) e^{-s\,A} ds = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{ds}\left(e^{-s\,A^t} e^{-s\,A}\right) ds = Id.$$

Méthode de Liapounov

Calculons maintenant $\frac{d}{dt}(Bx(t), x(t))$ où x est solution de l'EDO. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Bx(t), x(t)) &= (B\frac{d}{dt}x(t), x(t)) + (Bx(t), \frac{d}{dt}x(t)) \\ &= -\|x(t)\|^2 + ((B + B^t)f(t, x(t)), x(t)), \end{aligned}$$

car $\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) - Ax(t)$ et $BA + A^tB = Id$.
On conclut par la petitesse de $\varepsilon(x)$ de sorte que

$$((B + B^t)f(t, x(t)), x(t)) \leq \frac{1}{2}\|x(t)\|^2.$$

Exercice : Etudier la stabilité des systèmes suivants en construisant une fonction de Liapounov de la forme $V(x, y) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2}$ pour le système

$$\begin{cases} x' = -x - 2y^3 \\ y' = xy^2 - y^3 \end{cases}$$