Université de Toulon 10 novembre 2017

Partiel d'Analyse Numérique, M33 (durée: 1 heure 30)

(Tout document interdit, calculatrice autorisée)

Exercice 1.

(2 pt.) Construire le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, -2)$.

On construit les polynomes de Lagrange élementaires de $\mathbb{R}_3[x]$ satisfaisant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$$

On a :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}, \\ L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}, \\ L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}. \end{aligned}$$

La base des polynomes de Lagrange élémentaires est adaptée pour décrire le polynômes de Lagrange interpolant puisque les coordonnées dans cette base sont les valeurs prises aux points d'interpolation:

$$P(x) = 3L_0(x) + 2L_1(x) + 4L_2(x) - 2L_3(x).$$

Exercice 2.

(2 pt.) Démontrer l'unicité dans $\mathbb{R}^4[x]$ de l'interpolation polinômiale telle que $p(0) = 1$, $p'(0) = 12$, $p(1) = 2$, $p'(1) = 21$, $p(2) = 5$.

On suppose que p et q existent dans $\mathbb{R}^4[x]$ et satisfont l'interpolation proposée. Ainsi $r = p - q$ élément de $\mathbb{R}^4[x]$ satisfait $r(0) = 0$, $r'(0) = 0$, $r(1) = 0$, $r'(1) = 0$, $r(2) = 0$. Donc r admet la factorisation suivante:

$$r(x) = x^2(x-1)^2(x-2)s(x),$$

avec s un polynôme. Mais s est nécessairement nulle sinon le degré de r dépasse 5 alors qu'il est inférieur à 4.

Exercice 3.

Le but de cet exercice est de calculer la solution du problème $\frac{1}{2}\sin x - x + 1 = 0$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$

1. **(2 pt.)** Montrer que g admet un unique point fixe.

   On note h la fonction $C^1(\mathbb{R}^+)$ définie par
   $$h(x) = g(x) - x.$$
   Répondre à la question posée revient à montrer que h possède un unique 0. Or $\forall x \geq 0$, $h'(x) = \frac{1}{2}\cos x - 1 \leq \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Donc h décroit strictement sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $h(0) = 1$ et $h(\pi) = 1 - \pi < 0$, ainsi par le théorème des valeurs intermédiaires, h possède un zéro sur $]0, \pi[$ et c'est le seul sur $\mathbb{R}^+$ par stricte monotonie de h sur $\mathbb{R}^+$. On notera l ce point fixe.

2. **(2 pt.)** Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,
   $$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 > 0.$$
   A l'aide des graphes de g et de l'identité sur $\mathbb{R}^{+*}$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.

   Observer...

3. **(1 pt.)** Montrer que g est contractante.

   D'après l'inégalité des accroissements finis (g est $C^1(\mathbb{R}^+)$), la constante de Lipschitz de g est majorée par $\max_{\mathbb{R}^+} |g'| = \frac{1}{2} < 1$. Donc g est contractante.

4. **(2 pt.)** En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   On applique un résultat du cours qui assure que, puisque g est contractante sur $\mathbb{R}^+$ et laisse invariant $\mathbb{R}^+$ ($g \geq \frac{1}{2}$) , alors la suite $(x_n)_n$ définie par récurrence converge vers un point fixe de g de $\mathbb{R}^+$. Ce dernier est unique d'après la première question. La suite $(x_n)_n$ converge vers l.

   On peut facilement refaire la preuve (pas nécessaire): la suite $(x_n)_n$ est dans $\mathbb{R}^+$ puisque $g \geq \frac{1}{2}$. La propriété de contraction s'applique donc dans toutes les inégalités suivantes:
   $$|x_n - l| = |g(x_{n-1}) - g(l)| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - l| \leq \cdot \leq \frac{1}{2^n}|x_0 - l|.$$
   On obtient le résultat par passage à la limite sachant que le membre de droite converge trivialement vers 0.

5. **(2 pt.)** Calculer l'ordre de convergence de la suite.

   D'après le cours, il suffit de calculer les dérivées successives de g en l jusqu'à la non annulation de cette quantité. Or $g'(l) = \frac{1}{2}\cos l$, cette quantité n'est pas nulle car cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ sur $[0, \pi]$ et $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} \neq \frac{\pi}{2}$. Donc la convergence est d'ordre 1.

Exercice 4.

Soit f une fonction $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ de subdivision de l'intervalle $[a;b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature à $2n$ points pour approcher

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

On propose dans un premier temps (question 1 à 2) de construire la formule de quadrature à deux points:

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx \approx FQ = \frac{4}{3}g(-\frac{w}{2}) + \frac{2}{3}g(w), \tag{2}$$

1. **(2 pt.)** Montrer que cette formule de quadrature est toujours exacte pour toute fonction g polynomiale de $\mathbb{R}^1[x]$.

   Si $g(x) = 1$, alors $\int_{-1}^1 g(x)\,dx = 2$ et $FQ = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$
   Si $g(x) = x$, alors $\int_{-1}^1 g(x)\,dx = 0$ et $FQ = -\frac{4}{3}\frac{w}{2} + \frac{2}{3}w = 0$.
   Par combinaison linéaire, la formule de quadrature est exacte pour tout polynome de $\mathbb{R}_1[x]$.

2. **(2 pt.)** Déterminer w pour que la formule de quadrature (2) soit de degré de précision maximal et le préciser.

   Si $g(x) = x^2$, alors $\int_{-1}^1 g(x)\,dx = \frac{2}{3}$ et $FQ = \frac{4}{3}\frac{w^2}{4} + \frac{2}{3}w^2 = w^2$.
   La formule de quadrature sera exacte pour cette fonction si $w^2 = \frac{2}{3}$, soit deux valeurs possibles pour w.
   On vérifie que pour ces deux valeurs la formule de quadrature est fausse pour $g(x) = x^3$.
   Ainsi, le degré de précision est exactement 2 ssi $w^2 = \frac{2}{3}$.

3. **(2 pt.)** A l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale suivante:

   $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$$

   En s'appuyant sur la transformation affine h_i: $x \to \frac{x_i+x_{i+1}}{2} + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}x$ qui envoie $[-1,1]$ sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a

   $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx FQ = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}(\frac{4}{3}f\circ h_i(-\frac{w}{2})+\frac{2}{3}f\circ h_i(w)) = \frac{x_{i+1}-x_i}{3}(2f\circ h_i(-\frac{w}{2})+f\circ h_i(w)).$$

4. **(2 pt.)** En déduire une formule de quadrature à $2n$ points, notée F, pour le calcul approché de (1).

   On exploite la linéarité de l'intégrale:

   $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx FQ = \frac{x_{i+1}-x_i}{3} \sum_{i=0}^{n-1} 2f\circ h_i(-\frac{w}{2}) + f\circ h_i(w)$$

5. **(2 pt.)** Ecrire l'algorithme du calcul de F.

   Ecrire l'algorithme pour la sommation de la formule de quadrature en s'appuyant sur la fonction h_i qui dépend de i.