Université de Toulon 2 novembre 2016

Correction Partiel d'Analyse Numérique, M33 (durée: 1 heure 10)

(Tout document interdit)

Exercice 1.

(2.5 pt.) Proposer une expression du polynôme de Lagrange qui interpole la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin(x)$ aux points d'abscisse $0, 1, 2, 3$.

On introduit les polynômes de Lagrange élémentaires $(L_i)_0 \leq i \leq 3$ construits sur les points d'abscisse $0, 1, 2, 3$. Par définition de cette base, le polynôme p d'interpolation de Lagrange interpolant f en $0, 1, 2, 3$ s'écrit:

$$p = 0L_0 + \sin(1)L_1 + 4\sin(2)L_2 + 9\sin(3)L_3 = \sin(1)L_1 + 4\sin(2)L_2 + 9\sin(3)L_3,$$

avec

$$\begin{aligned} L_1(x) &= -x(x-2)(x-3)/2 \\ L_2(x) &= -x(x-1)(x-3)/2 \\ L_3(x) &= x(x-1)(x-2)/6. \end{aligned}$$

Exercice 2.

(1.5 pt.) Proposer, sans calcul, le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 7)$, $(4, 9)$, $(5, 11)$, $(6, 13)$, $(7, 15)$, $(8, 17)$, $(9, 19)$. Justifier qu'il s'agit bien du polynôme de Lagrange.

On constate que les abscisses s'incrémentent de 1 alors que les ordonnées s'incrémentent de 2. On en déduit qu'une expression affine satisfait l'interpolation. On propose:

$$p(x) = 2x + 1.$$

Ce polynôme interpole les points proposés, il est de degré 1 et est donc *a fortiuri* élément de $\mathbb{R}_9[x]$, p est donc l'unique polynôme de Lagrange interpolant ces 10 points.

Exercice 3.

(2.5 pt.) Proposer, avec peu de calcul, le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 7)$, $(4, 9)$, $(5, 11)$, $(6, 13)$, $(7, 15)$, $(8, 17)$, $(9, 20)$. Justifier qu'il s'agit bien du polynôme de Lagrange.

En s'inspirant de l'exercice précédent, on constate qu'il est astucieux de chercher le polynôme d'interpolation de Lagrange, noté r, sous la forme:

$$r = p + q,$$

avec $p(x) = 2x + 1$. Ainsi q interpôle les points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(5, 0)$, $(6, 0)$, $(7, 0)$, $(8, 0)$, $(9, 20 - 19 = 1)$. Ainsi on a $q(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)/9!$, d'où l'expression de r.

Exercice 4.

(2.5 pt.) Donner l'expression d'un polynôme p de $\mathbb{R}_3[x]$ tel que $p(1) = 0$, $p'(1) = 0$, $p(2) = 0$ et $p(3) = 1$. Vérifier que p est unique dans $\mathbb{R}_3[x]$.

On cherche p sous la forme $p(x) = (x-1)^2(x-2)q(x)$ car 1 est racine de p et de p' et 2 est racine de p. En cherchant p élément de $\mathbb{R}_3[x]$, on est contraint de choisir q constant. Comme $p(3) = 1$, on trouve $q = 1/4$ et

$$p(x) = (x-1)^2(x-2)/4.$$

Pour s'assurer l'unicité de p dans $\mathbb{R}_3[x]$, on suppose qu'il existe p et q éléments de $\mathbb{R}_3[x]$ satisfaisant les conditions d'interpolation. Alors $r = p - q$ peut se factoriser comme

$$r(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)z(x),$$

avec z qui est nécessairement nul car sinon le degré de r est supérieur strictement à 3.

Exercice 5.

(2 pt.) On suppose une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note p le polynôme de Lagrange qui interpole f aux abscisses $0, 1, 2, 3$. Donner une estimation d'erreur entre f et p sur $[0, 3]$ faisant intervenir la dérivée quatrième de f.

Question de cours. Revoir le cours si vous ne savez pas répondre.

Exercice 6.

On veut résoudre l'équation $e^{-x} = x$ dans $\mathbb{R}$.

1. **(2.5 pt.)** Vérifier que cette équation admet une unique solution, notée α, dans $\mathbb{R}^{+*}$.

   On étudie la fonction $f(x) = e^{-x} - x$ sur $\mathbb{R}$, on cherche à montrer que f s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. Cette fonction est la somme de deux fonctions strictement décroissantes, elle est donc strictement décroissante. Or $f(0) = 1$ et f est décroissante continue, la fonction ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}^-$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et f est continue, on en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires que f s'annule sur $\mathbb{R}^{+*}$ et seulement une seule fois par stricte monotonie de f. Ainsi il existe une unique solution, notée α, dans $\mathbb{R}^{+*}$ satisfaisant $f(\alpha) = 0$.

2. **(3 pt.)** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{-x}$. On définit la suite récurrente

   $$u_{n+1} = g(u_n), \quad u_0 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   Faire le graphe ...

   On veut montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. Pour cela, observer et dessiner d'abord la convergence graphique de la suite. Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement.

   On observe que la suite est positive à partir du rang 1 (au moins), non monotone, mais convergente vers α. Comme g est strictement positive (une exponentielle!) la suite $(u_n)_n$ ($u_{n+1} = g(u_n)$) est strictement positive à partir du rang 1. Or g envoie $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $|g'(x)| = e^{-x} < 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par le théorème du cours, on sait que la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe de g sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui est aussi l'unique 0 de f noté α.

3. **(1.5 pt.)** Ecrire la méthode de NEWTON pour résoudre l'équation $e^{-x} = x$.

   On écrit la méthode de Newton pour la recherche du zéro de f. Cela revient à introduire la suite définie par récurrence

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} = v_n + \frac{e^{-v_n} - v_n}{e^{-v_n} + 1}, \quad v_0 \in \mathbb{R}.$$

4. **(2.5 pt.)** Entre la méthode de NEWTON et la méthode de point fixe (1), laquelle faut-il préférer vis-à-vis de la vitesse de convergence ? Justifiez votre réponse.

   On sait que la méthode de Newton converge à l'ordre 2 au moins alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proposée converge à l'ordre 1 puisque $g'(\alpha) \neq 0$. La méthode de Newton est donc plus rapide.