Equations différentielles - M61 2020

Contrôle continu du 06 mars - Durée 2h
Documents interdits.

1. (Question de cours) Soit le système d'EDO linéaire suivant à coefficients constants, $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

(a) Donner l'expression de la solution (Formule de Duhamel).
La solution de l'EDO s'écrit (Formule de Duhamel) :

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds.$$

(b) Montrer que si on suppose de plus que $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) \cup L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ et $Re(sp(A)) \subset \mathbb{R}^{-*}$ alors la solution x est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
On note -2λ la plus grande partie réelle des valeurs propres de A, on a $\lambda > 0$. D'après le cours, on a la majoration suivante avec $\|.\|$ la norme de $\mathbb{R}^n$.

$$\|x(t)\| \le e^{-\lambda t}\|x_0\| + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\|f(s)\|\, ds,\ \forall t \ge 0$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, on majore l'exponentielle dans l'intégrale par 1 et la majoration devient,

$$\|x(t)\| \le e^{-\lambda t}\|x_0\| + \int_0^t \|f(s)\|\, ds,\ \forall t \ge 0.$$

Ainsi

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|x(t)\| \le \|x_0\| + \int_0^\infty \|f(s)\|\, ds.$$

Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, on note $F = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|f(t)\|$ et on a la majoration suivante,

$$\|x(t)\| \le e^{-\lambda t}\|x_0\| + F\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\, ds,\ \forall t \ge 0.$$

Ainsi

$$\|x(t)\| \le e^{-\lambda t}\|x_0\| + F\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}\ \ \forall t \ge 0.$$

et

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|x(t)\| \le \|x_0\| + \frac{F}{\lambda}.$$

(c) Application : Résoudre $\begin{cases} u'(t) = -u(t) + v(t) \\ v'(t) = -v(t) + \sin(t) \\ u(0) = 0,\ v(0) = 0 \end{cases}$. (Remarquer que le système est découplé).
Le système proposé est ici découplé, on résoudra d'abord v puis u. La formule de Duhamel s'écrit pour l'équation v :

$$v(t) = \int_0^t e^{-t+s}\sin(s)\, ds.$$

Par deux intintégrations par partie, on obtient

$$\int_0^t e^{-t+s}\sin(s)\,ds = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{e^{-t}}{2}$$

A nouveau, par la formule de Duhamel appliquée pour u, on a

$$u(t) = \int_0^t e^{-t+s}v(s)\,ds = \int_0^t e^{-t+s}(\frac{1}{2}\sin(s) - \frac{1}{2}\cos(s) + \frac{e^{-s}}{2})\,ds$$

Soit,

$$u(t) = \frac{1}{2}((1+t)e^{-t} - \cos(t)).$$

2. En construisant une fonction de Liapounov de la forme $V(x,y) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2}$, étudier la globalité des solutions sur $\mathbb{R}^+$ ainsi que la stabilité de $(0,0)$ pour l'EDO :

$$\begin{cases} x'(t) = -2x^3(t) + x(t)y^2(t) \\ y'(t) = -2x^2(t)y(t) - y(t) \end{cases}.$$

Montrer de plus que x et y gardent le signe de leur donnée initiale sur tout l'intervalle de la solution maximale.
Compte tenu de l'expression polynômiale du second membre, le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique et il existe une unique solution maximale. Nous allons montrer qu'elle est globale sur $\mathbb{R}^+$ en construisant une fonction de Lyapunov.
On choisit $a = 2$ et $b = 1$, ainsi en sommant 2 fois la première équation fois $x(t)$ à 1 fois la deuxième équation fois $y(t)$, on a

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = -4x^4(t) - y^2(t) \leq 0.$$

Ainsi la fonction $t \to V(x(t), y(t))$ est décroissante positive donc bornée. Donc la solution est bornée pour tout temps positif donc global sur $\mathbb{R}^+$. De plus, le point stationnaire $(0,0)$ est asymptotiquement stable (cf cours).
On écrit la formule de Duhamel implicite composante par composante,

$$\begin{cases} x(t) = x(0)e^{\int_0^t -2x^2(s)+y^2(s)\,ds} \\ y(t) = y(0)e^{\int_0^t -2x^2(s)\,ds - t} \end{cases}.$$

Les exponentielles intervenant dans les deux formules sont bien définies pour tout t de l'intervalle de la solution maximale, on en déduit que $x(t)$ garde le signe de $x(0)$, $y(t)$ garde le signe de $y(0)$.

3. Etudier la stabilité des solutions stationnaires de

$$\begin{cases} x'(t) = -x^2(t) - y^2(t) + 2 \\ y'(t) = 1 - x(t)y(t) \end{cases}.$$

L'expression du second membre est une fonction polynômiale en x, y, le théormème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc et il existe une unique solution maximale pour chaque donnée de Cauchy. Pour les données de Cauchy telles que

$$\begin{cases} 2 = x_0^2 + y_0^2 \\ 1 = x_0 y_0, \end{cases}$$

la solution est globale et stationnaire : $(\mathbb{R}, (x_0, y_0))$. De telles données de Cauchy sont l'intersection du cercle centré en 0 et de rayon $\sqrt{2}$ et de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$. On obtient alors aisément les points stationnaires $(1,1)$, et $(-1,-1)$ On calcule le linéarisé du système en ces points. On traitera le point générique (x_0, y_0). Le linéarisé s'écrit, dans les variables (u, v),

$$\begin{cases} u'(t) = -2x_0u(t) - 2y_0v(t) \\ v'(t) = -x_0v(t) - u(t)y_0 \end{cases}.$$

On doit donc calculer les valeurs propres de

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont 0 et -3 pour le point $(1,1)$ et 0 et 3 pour le point $(-1,-1)$. Ce dernier est donc instable. On ne peut rien conclure pour le point $(1,1)$, l'étude nonlinéaire doit être approfondie mais n'est pas demandée ici.

4. On considère le système d'EDO dit "SEIR" qui décrit l'évolution d'une épidémie dans une population. La densité de population identifiée comme saine est notée S, identifiée comme infectée est notée I, identifiée comme exposée est notée E, identifiée comme retirée est notée R. Les paramètres p, α, β sont des réels strictement positifs.

$$\begin{cases} S'(t) = -pS(t)I(t), \\ E'(t) = pS(t)I(t) - \beta E(t), \\ I'(t) = \beta E(t) - \alpha I(t), \\ R'(t) = \alpha I(t), \\ S(0) = S_0 > 0,\ E(0) = S_0 > 0,\ I(0) = I_0 > 0,\ R(0) = R_0 > 0. \end{cases}$$

   (a) Expliquer le modèle à travers les transferts d'une population à l'autre.

   Pour comprendre le modèle, on suppose que chaque population reste positive. L'accroissement de S est négative et proportionnelle à S et I. C'est un modèle Malthusien de décroissance de la population saine S avec un taux de décroissance proportionnelle à la population des infectés (transmission de l'épidémie). On retrouve le terme $pS(t)I(t)$ dans l'accroissement de la population exposé, ce qui traduit le transfert d'une population à l'autre. Un terme de décroissance Malthusienne apparaît dans l'équation d'évolution de E pour traduire le transfert des exposés aux infectés, β traduit la vitesse à laquelle l'individu exposé devient infecté (maladie déclarée). On retrouve le terme βE avec le signe opposé dans l'équation d'accroissement de I pour traduire ce transfert de population. Le terme $-\alpha I$ traduit le transfert de I à R et α correspond à la vitesse de guérison (personne immunisée puisque non retour dans la population S) ou/et à la mortalité puisque la population R représente les populations immunisées ou décédées, celles qui n'interviennent plus dans la transmission de la maladie.

   (b) Montrer que ce système admet une unique solution maximale $(J, (S, E, I, R))$. Il s'agit d'un système d'EDO autonome du premier ordre écrit sous la forme $u'(t) = f(u(t))$ avec f polynômiale (donc C^∞) en ses arguments. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy admet donc une unique solution maximale $(J, (S, E, I, R))$ $C^\infty(J, \mathbb{R}^4)$.

   (c) Montrer que $S(t) > 0$ pour tout $t \in J$.

   A la lecture de la première équation, on peut écrire la formule implicite qui a du sens pour tout $t \in J$,

$$S(t) = e^{-p\int_0^t I(s)} S_0.$$

   On remarque ainsi, car une exponentielle définie est toujours strictement positive, que $S(t)$ garde le signe de $S_0 > 0$.

   (d) Montrer que pour tout $t_0 \in J \cap \mathbb{R}^+$ tel que $I(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, t_0]$, alors $E(t) > 0$, $\forall t \in [0, t_0]$.

   On applique à nouveau la formule de Duhamel implicite pour la seule variable $E(t)$,

$$E(t) = e^{-\beta t}E_0 + p\int_0^t e^{-\beta(t-s)} S(s)I(s)\, ds.$$

On sait que S et I sont positifs sur $[0, t_0]$, comme $E_0 > 0$, on a que $E(t) > 0$, $\forall t \in [0, t_0]$.

(e) Montrer que pour tout $t_0 \in J \cap \mathbb{R}^+$ tel que $E(t) \geq 0$ pour tout $t[0, t_0]$, alors $I(t) > 0,\ \forall t \in [0, t_0]$.
On procède de même,

$$I(t) = e^{-\alpha t} I_0 + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} E(s)\, ds.$$

On sait que E est positif sur $[0, t_0]$, comme $I_0 > 0$, on a que $I(t) > 0$, $\forall t \in [0, t_0]$.

(f) Déduire des deux dernières questions que $E(t) > 0$, $I(t) > 0$, puis $R(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \cap J$.
Supposons que E s'annule pour la première fois en $t_1 > 0$ avant que I ne se soit annulée. On en déduit que $I(t) > 0$ pour tout $t \in [0, t_1]$ (question précédente). On utilise l'avant dernière question pour conclure que $E(t_1) > 0$. C'est absurde, donc E ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^+ \cap J$ avant que I ne s'annule. On suppose donc que I s'annule pour la première fois en $t_1 > 0$ avant que E ne se soit annulée. On procède de même pour conclure que c'est absurde. Ainsi, ni I ni E ne peuvent s'annuler sur $\mathbb{R}^+ \cap J$. Finalement,

$$R(t) = R_0 + \alpha \int_0^t I(s)\, ds > R_0 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \cap J.$$

(g) Calculer la somme des populations et en déduire que $\mathbb{R}^+ \subset J$.
On remarque que $(S+E+I+R)'(t) = 0$. Ainsi la somme des populations reste constante au cours du temps et par positivité de chacune d'elle, elles sont toutes bornées sur $\mathbb{R}^+ \subset J$. Le théorème des extrémités assure donc que $\mathbb{R}^+ \subset J = \mathbb{R}^+$.

(h) Trouver l'ensemble des points stationnaires positifs du modèle.
On note (S_*, E_*, I_*, R_*), s'il existe, un point stationnaire. Par la dernière équation du système, on a $I_* = 0$. Par la troisième équation du système, on a alors $E_* = 0$. Tout point de la forme $(S_*, 0, 0, R_*)$ est donc point stationnaire du système. On se limite à étudier $S_* \geq 0$, $R_* \geq 0$.

(i) En autorisant que des perturbations positives pour chacune des composantes nulles du point stationnaire considéré, étudier la stabilité du point stationnaire pour de telles perturbations.
On note (S_0, E_0, I_0, R_0) la donnée de Cauchy qui est une petite perturbation positive de $(S_*, 0, 0, R_*)$.
On suppose d'abord que $S_* = 0$. Comme S est positif pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et décroissant , alors $S_* = 0$ est stable, indépendamment des autres populations.
On a par ailleurs :

$$\begin{cases} E(t) = E_0 e^{-\beta t} + p \int_0^t e^{-\beta(t-s)} S(s) I(s)\, ds \\ I(t) = I_0 e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} E(s)\, ds \end{cases}.$$

Comme S est stable, on pourra rendre S aussi petit que l'on souhaite et I borné (cf question précédente) assure qu'il existe $C > 0$ tel que

$$0 \leq E(t) \leq E_0 e^{-\beta t} + C \sup_{\mathbb{R}^+} S.$$

On conclut alors aisément à la stabilité de E puis celle de I par

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \sup_{\mathbb{R}^+} E.$$

La stabilité de R se déduit de la conservation globale des populations.
Si $S_* > 0$, c'est plus dur... il faut étudier le linéarisé du problème en (S, E, I). On doit étudier les valeurs propres de

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -pS_* \\ 0 & -\beta & pS_* \\ 0 & \beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

qui sont 0, $-\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\beta p S_*}$ et $-\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\beta p S_*}$ Sous la condition de positivité stricte de la dernière valeur propre, le point stationnaire est instable, sinon, on notera que un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est $(1, 0, 0)$. On peut alors montrer sous la condition $\alpha + \beta > \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\beta p S_*}$ la stabilité du système... La stabilité de R se déduit de la stabilité de I ou de la conservation globale des populations.