

## Chap 1

Problème d'évolution  
parabolique :

exple type : l'éq de la chaleur

### I Ecriture du modèle.

On considère un opérateur elliptique

$A$ , ie un opérateur aux dérivées  
partielles défini sur un domaine  $\Omega$   
 $\subset \mathbb{R}^d$ , associé à des conditions limites  
(si  $\Omega$  est borné), qui satisfait  
les hyp du thm de Lax-Milgram.

Exple :  $A : -\Delta + cI$  Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$\partial\Omega$ : bord de  $\Omega$ .

Les pbs paraboliques qui nous  
intéressent sont de la forme

suivante :  $u \equiv u(t, x)$  inconnu  
 $t \geq 0, x \in \Omega$ .

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= f \\ + cI : u(t=0, \cdot) &= u_0(\cdot) \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

condition initiale  
ou données de Cauchy.

Exemple: 
$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) = 0 & t > 0, x \in \Omega \\ \text{C.I.} \rightarrow u(t=0, x) = u_0(x) & x \in \Omega \\ \text{C.L.} \rightarrow u(t, x) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

Chaleur 1D:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx}^2 u = 0 \\ \text{+ C.I.} & t > 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\hat{u}(t, \xi) = \overline{F}(u(t, x))$$

↑ en x seulement.

Les pbs pertinents sont ceux où A est un opérateur d'ordre 2 (voire 4)

d'ordre 0 est trivial, l'ordre 2 représente les phénomènes classiques de diffusion entre autres

II Propriétés locales et qualitatives.

1) Cas 1D, transformée de Fourier.

On appelle  $\xi$  la variable Fourier (une fréquence) de  $x \in \mathbb{R}$ .

On considère l'éq de la

On applique  $\overline{F}$  à l'éq:

$$\partial_x \hat{u}(t, \xi) - (i\xi)^2 \hat{u}(t, \xi) = 0$$

$$\partial_x \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0$$

$$\hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi)$$

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi)$$

Cette formule nous renseigne sur le caractère amortissant de l'éq en temps ↑.

L'amortissement est d'autant plus fort, en temps, que la fréquence est élevée. Ceci assure un caractère

régularisant à la solution: Même si la donnée initiale est discontinue, la solution pour  $t > 0$  est  $\mathcal{C}^\infty$ .


La caractéristique de ce phénomène est que l'éq n'é peut être résolue en temps  $t < 0$ .


Une autre propriété associée est le phénomène de propagation à vitesse infinie de l'information.

La solution peut s'écrire sous la

forme

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy$$

$u_0$ :   $\hat{=}$  "perturbé de 0".

$u(t > 0)$ :  - 0

La solution  $u(t > 0, \cdot)$  étant partout  $> 0$  (d'après la formule), on comprend que la "perturbé de 0" a une influence loin en temps aussi constant que l'on veut.

2) Estimation d'énergie, cas  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

On reprend l'éq parabolique :

$$\partial_t u + Au = 0 \quad (P)$$

$$(Au, u)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} Au \cdot u \, dx \geq c \|u\|_V^2 \geq K \|u\|_{L^2}^2.$$

On prend le p.s.  $L^{2(p)}$  de l'éq (P) avec la valeur  $u$ . On appelle estimation d'énergie, un tel calcul :

$$(\partial_t u, u)_{L^2} + (Au, u)_{L^2} = 0.$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t |u|^2 \, dx + \text{---} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + (Au, u) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2K \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq 0$$

$$\text{Donc } \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq e^{-2Kt} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

• On se donne la même eq. avec un terme source.

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f(x) \\ u(t=0, \cdot) = u_0(\cdot) \quad (CI) \end{cases}$$

On procède au même calcul pour estimer  $\|u\|_2$ .

$$(\partial_t u, u)_{L^2} + (Au, u)_{L^2} = (f, u)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2K \|u\|_{L^2}^2 \leq (f, u)_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$$

(ineq de Cauchy-Schwarz).

$$\leq K \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4K} \|f\|_{L^2}^2$$

$$y(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2$$

$$y' + Ky \leq C = \frac{1}{4K} \|f\|_{L^2}^2$$

$$y(0) = \|u_0\|_{L^2}^2$$

$$\hookrightarrow y(t) \leq y(0) e^{-Kt} + \int_0^t e^{-K(t-s)} C ds$$

$$y(t) \leq y(0) e^{-Kt} + \frac{C}{K} (1 - e^{-Kt})$$

$$\text{Ainsi, } \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 e^{-Kt} + \frac{\|f\|_{L^2}^2}{4K^2}$$

Remarque: Si on note  $v = u - u_\infty$  avec  $u_\infty$  la solui de  $Au_\infty = f$ .

$$\begin{cases} \partial_t v + Av = 0 \\ v(t=0) = u_0 - u_\infty \end{cases}$$

On a vu que :

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq e^{-2Kt} \|u_0 - u_\infty\|_{L^2}^2$$

$\downarrow t \rightarrow +\infty$

$$\hookrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot) - u_\infty\| = 0$$

### III Discrétisation des eq.

1) Rappel sur les eqs. amorties ( $\lambda > 0$ )

$$\text{On considère l'EDO } \begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = 0 & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{La solution est } u(t) = u_0 e^{-\lambda t}.$$

On propose le schéma numérique:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + \lambda u^{n+1} = 0$$

$$\text{avec } u^n \approx u(t_n) \quad t_n = n \delta t.$$

On a défini une suite par récurrence à partir de  $u^0 = u_0$ .

Ce schéma est le schéma d'Euler

implicite.

$$\text{On a : } u^{n+1} (1 + \lambda \delta t) = u^n$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{1 + \lambda \delta t} u^n.$$

C'est une suite géométrique de

$$\text{raison } 0 < \frac{1}{1 + \lambda \delta t} < 1.$$

Donc  $(|u^n|)$  est  $\searrow$  et tend vers  $0$ .

• On peut aussi choisir le schéma de Crank-Nicholson:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + \lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} = 0$$

$$u^{n+1} \left( 1 + \frac{\lambda \delta t}{2} \right) = \left( 1 - \frac{\lambda \delta t}{2} \right) u^n$$

$$u^{n+1} = \frac{1 - \frac{\lambda \delta t}{2}}{1 + \frac{\lambda \delta t}{2}} u^n$$

La raison de cette suite géométrique

$$\text{est } r = \frac{1 - \frac{\lambda \delta t}{2}}{1 + \frac{\lambda \delta t}{2}}$$

$$-1 < r < 1$$

$$\text{Ainsi: } |u^{n+1}| < |u^n|$$

• Schéma Euler explicite:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + \lambda u^n = 0$$

$$u^{n+1} = \underbrace{\left( 1 - \lambda \delta t \right)}_{\text{raison de la suite } < 1} u^n$$

raison de la  
suite  $< 1$

Si  $\lambda \delta t > 2$  la raison est  $< -1$

$$\text{et } |u^{n+1}| > |u^n|$$

Le schéma sera adapté à  
condition de contraindre  $\delta t$   
en fonction de  $\lambda$ .

2) Schéma implicite sur eq Parabolique.

$$\begin{cases} \partial_t u + A u = 0 \\ u(t=0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

$A$  est un opérateur elliptique associé à des CL non précisées.

Le schéma d'Euler implicite s'écrit

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + A u^{n+1} = 0 \quad (E) \\ u^0 = u_0 \end{cases}$$

(On n'a pas besoin d'introduire de discrétisation spatiale à ce stade)

On souhaite retrouver un contrôle

de l'énergie sur la suite  $(u^n)_n$ .

Définition : On dit qu'un schéma est  $A$ -stable pour une norme  $\|\cdot\|_n$  si  $\|u^n\| \leq K$  pour une constante  $K$  indépendante de  $n$ .

On cherche donc à construire des schémas  $A$ -stable. Idéalement, on cherchera des schémas inconditionnellement stables par rapport au pas  $\delta t > 0$ .

Remarque :  $u^{n+1}$  solution de (E) existe car est solution d'un pb elliptique.



$$\left( \frac{\text{Id}}{\delta t} + A \right) u^{n+1} = \frac{u^n}{\delta t} \leftarrow \text{donné } L^2(\Omega)$$

↑  
Opérateur elliptique  
sur  $H^1(\Omega)$  par exemple.

Car si  $A$  est elliptique  $\frac{\text{Id}}{\delta t} + A$  aussi

( $\delta t > 0$ ).

• Pour démontrer la prop. de  $A$ -stabilité  $L^2$  (ie pour  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$ ), on prend le p.s. de l'eq (E) avec  $u^{n+1}$

↑  
 $L^2$

$$\frac{\|u^{n+1}\|_{L^2}^2 - (u^n, u^{n+1})_{L^2}}{\delta t} + \underbrace{(A u^{n+1}, u^{n+1})}_{\geq 0} = 0$$

$$\|u^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq (u^n, u^{n+1})_{L^2}$$

$$\leq \|u^n\|_{L^2} \|u^{n+1}\|_{L^2}$$

$$\hookrightarrow \|u^{n+1}\|_{L^2} \leq \|u^n\|_{L^2}$$

et ce, sans condition sur  $\delta t > 0$ .

Donc Euler implicite est  $A$ -stable  $L^2$   
pour les pbs paraboliques stationnaires.

Exercice : Obtenir le même résultat avec un terme source  $L^2$  de l'eq :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = f \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

(Mimer le calcul en continu en faisant apparaître une suite arithmético-géométrique)

$$y_{n+1} = ay_n + c$$

On reprend le schéma de Crank-Nicholson sur l'eq (P) :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + A \frac{u^n + u^{n+1}}{2} = 0 \quad (*)$$

La suite est bien définie comme une récurrence de solutions de pb elliptique.

On prend le p.s. de (\*) avec

$$\frac{u^n + u^{n+1}}{2}$$

$$\underbrace{\left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t}, \frac{u^n + u^{n+1}}{2} \right)}_{L^2} + \underbrace{\left( A \frac{u^n + u^{n+1}}{2}, \frac{u^n + u^{n+1}}{2} \right)}_{L^2}$$

$$\|u^{n+1}\|_2^2 \leq \|u^n\|_2^2 \quad \text{par ellipticité de } A$$

D'où la  $A$ -stabilité  $L^2$ .

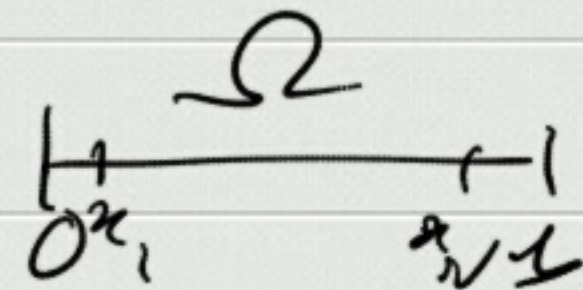
### 3) Schéma explicite.

Vu le mauvais comportement de ce schéma sur les eq aux limites pour  $\lambda$  grand (cf 1), limitai de  $\delta t$  en fonction de  $\lambda$ , et comme l'eq de la chaleur (pb type parabolique) est une eq aux limites freq. par freq avec un amortissement en  $|\eta|^2$ , on s'attend à des pbs et des limitai sur  $\delta t$ . On va introduire d'abord une discrétisation spatiale pour limiter

les fréquences.

On considère le toy modèle:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx}^2 u = 0 & t > 0, x \in ]0, 1[ \\ u(t=0, \cdot) = u_0(\cdot) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (CL) \end{cases}$$



On propose une discrétisation spatiale D.F. centrée avec  $x_i = ih$   
 $1 \leq i \leq N$

$$x_{N+1} = 1 \quad \boxed{h = \frac{1}{N+1}}$$

L'approximation spatiale conduit au système d'EDO:

$$\partial_t U(t) + M U(t) = 0$$

avec  $U(t) \in \mathbb{R}^N$  et  $M = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$M$  est définie positive :

$$M U \cdot U \geq c \|U\|_{\mathbb{R}^N}^2$$

↑  
p.s. de  $\mathbb{R}^N$ .

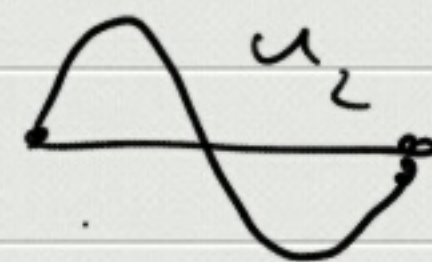
(analogue discret de la prop. d'ellipticité de  $-\partial_{xx}^2$ )

fin du premier cours.

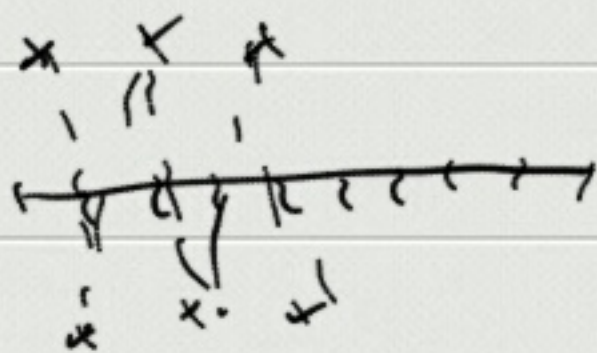
$$u(x) = \sum \alpha_i u_i(x)$$

has  $u_i$  : vecteur propre de  $((-\Delta) + cL)$

associé à la v.p.  $\lambda_i$



$$-u_i'' = \lambda_i u_i$$



$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

$$\partial_t u_i + \lambda_i u_i = 0$$

$$u(t, x) = \sum \alpha_i(t) u_i(x)$$

$$\partial_t u = \sum \alpha_i'(t) u_i(t)$$

$$-\Delta u = \sum \alpha_i(t) \lambda_i u_i(t)$$

$$\alpha_i'(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = 0$$

le schéma d'Euler explicite pour le système linéaire :

$$\partial_t W(t) + M W(t) = 0$$

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\delta t} + M W^n = 0.$$

$$W^n \in \mathbb{R}^N$$

L'intérêt d'un schéma explicite

est qu'une itération est simple et peu coûteuse (produit matrice vecteur)

$$W^{n+1} = W^n - \delta t M W^n$$

$$W^{n+1} = (I - \delta t M) W^n$$

Ce schéma sera stable si et seulement si  $|\rho(I - \delta t M)| \leq 1$ .

$M$  possède que des valeurs propres ~~sa~~ réelles et  $> 0$ .

$\delta t$  sera limité par la plus gde valeur propre de  $M$   $\lambda_{\max}$ .

$$1 - \delta t \lambda_{\max} > -1.$$

$$\text{et } \hat{m} \text{ ————— } > 0$$

pour un comportement sans  
artifact (changement de signe, non  
respect de borne min-max ...).

$$1 - \delta t \lambda_{\max} > 0$$

$$\delta t \leq \frac{1}{\lambda_{\max}} \text{ ou } \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

Or la plus gde v.p de  $\Pi$ :  $\lambda_{\max}$   
est de l'ordre de  $1/h^2$ .

$$\text{Soit } \delta t \leq \alpha h^2.$$

On va exhiber cette condition  
restrictive sur le pas de temps  
en fonction du pas d'espace  
(appelée condition CFL:  
Courant-Friedrich-Levy) pour  
la norme  $L^\infty$ .

$$u_i^{n+1} = \left(1 - 2 \frac{\delta t}{h^2}\right) u_i^n$$

$$\text{Si } \delta t \leq \frac{h^2}{2}, \text{ alors } 1 - 2 \frac{\delta t}{h^2} > 0$$
$$+ \frac{\delta t}{h^2} u_{i-1}^n + \frac{\delta t}{h^2} u_{i+1}^n.$$

et les poids de  $u_{i-1}^m, u_i^m, u_{i+1}^m$  sont  
alors positifs et de somme égale à 1:

$$1 - 2\frac{\delta t}{h^2} + \frac{\delta t}{h^2} + \frac{\delta t}{h^2} = 1.$$

Ainsi,  $U_i^{m+1}$  est une combinaison  
convexe de  $U_{i-1}^m, U_i^m, U_{i+1}^m$   
et donc

$$\min(U_{i-1}^m, U_i^m, U_{i+1}^m) \leq U_i^{m+1} \leq \max(U_{i-1}^m, U_i^m, U_{i+1}^m)$$

$$\text{et donc } \min_j U_j^m \leq U_i^{m+1} \leq \max_j U_j^m$$

On obtient donc la stabilité

$L^\infty$  du schéma sous CFL

$\delta t \leq h^2/2$  et  $m$  a lieu :

Le schéma respecte le principe  
du maximum.

#### IV Problèmes non linéaires.

1) Conduction variable.

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div} \left( \frac{\lambda}{\epsilon c} \nabla u \right) = f \\ + CL \\ + CI. \end{cases}$$

$\lambda$  le coeff de conductivité  
thermique peut être variable.

Supposons que  $\lambda$  dépende de  $u$ .

Rq: De telles eq. se rencontrent  
fréquemment en milieu poreux.

On s'intéresse au pb du type:

$$\partial_t u - \operatorname{div}(k(u) \nabla u) = f.$$

avec  $k(u) \geq k_0 > 0, \forall u$ .

Pour se ramener à une résolu numérique  
simple et un schéma stable, l'important  
est d'implémenter seulement  $\nabla u$ .

Exemple de schéma stable:

$$\frac{u^{m+1}(x) - u^n(x)}{\delta t} - \operatorname{div}(k(u^n) \nabla u^{m+1}) = f(x)$$

Preuve de stabilité avec  $f=0$ .

On multiplie par  $u^{m+1}$  et on intègre  $\int_{\Omega}$ ,

on suppose que la CL est  $u|_{\partial\Omega} = 0$

$$\frac{\|u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - (u^m, u^{m+1})_{L^2}}{\delta t} + \int_{\Omega} k(u^n) \nabla u^{m+1} \cdot \nabla u^{m+1} dx \geq 0$$

$$\text{Ainsi } \|u^{m+1}\|_{L^2}^2 \leq (u^m, u^{m+1})_{L^2} = 0$$

$$\text{D'où } \|u^{m+1}\|_{L^2} \leq \|u^m\|_{L^2}$$



Le schéma (\*) est linéaire :

$u^{m+1}$  se déduit de  $u^m$  par la résolution d'un pb elliptique linéaire, qui sera approché par un système linéaire dans  $\mathbb{R}^N$  ( $N$  grand).

2) Conduction variable en stationnaire.

Supposons qu'on cherche la solution du pb stationnaire :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(u)\nabla u) = f \\ + CL : u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce pb, on peut le résoudre comme asymptotique en temps du pb 1), ou bien utiliser une méthode de linéarisation de type Newton ou Newton-Raphson.

De façon générale, on peut se ramener, après discrétisation spatiale à un pb du type :

$$F(U) = 0 \quad \text{où } U \in \mathbb{R}^N.$$

$$F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

On se donne  $U_0$ ,

Pour  $U_k$  donné, on cherche  $U_{k+1}$  solution de

$$F(U_k) + \nabla F(U_k)(U_{k+1} - U_k) = 0$$

Par la formule de Taylor l'expression ci-dessus est une approximation de  $F(U_{k+1})$ .

L'algorithme converge (comme tout algorithme pt fixe) vers un zéro de  $F$  à condition de partir proche d'un zéro de  $F$ .

$$\text{Soit } U_{k+1} = U_k + \underbrace{(\nabla F(U_k))^{-1} F(U_k)}_{\text{en espérant } \nabla F(U_k) \text{ inversible.}}$$

Si on applique l'algorithme de Newton avant discrétisation spatiale, on a :

$u_p(x)$  donné :

$$\begin{aligned} & -\operatorname{div}(k(u_p) \nabla u_p) + b(u_p) \nabla(u_{p+1} - u_p) \\ & + k'(u_p)(u_{p+1} - u_p) \nabla u_p = f \end{aligned}$$

Rq : Selon les cas, on peut transformer les eqs. pour construire un pb équivalent linéaire.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(u) \nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } K(u) = k(u)$$

$$\nabla(K(u)) = k(u) \nabla u$$

On peut alors se ramener au pb

$$\text{linéaire : } \begin{cases} -\operatorname{div} \nabla R = f \\ R|_{\partial\Omega} = R(0) \end{cases}$$

Et on reconstitue  $u = K^{-1}(R)$

à condition que  $K^{-1}$  soit défini.

Ça ne peut pas fonctionner si on résout

$$\begin{cases} u - \operatorname{div}(k(u) \nabla u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

### 3) Non-linéarité de type réaction-diffusion

On considère ici des pb issus de réaction chimique ou d'interac<sup>ti</sup> entre espèce biologique associé à des phénomènes de diffusion (et plus tard d'advection)

$u(t, x) \in \mathbb{R}^m$  ( $m$ : nombre d'espèces): densité de popula<sup>ti</sup>, concentra<sup>ti</sup> chimique...

$$\text{C.I. } \begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(D \nabla u) = f(u) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \end{cases} + \text{CL}_m$$

avec  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction NL: réactions.

Il se peut que les échelles de temps ne soient pas les mêmes entre les termes réactifs et les temps de diffusion. On peut chercher alors à découpler ces 2 phénomènes.

On va résoudre sur un pas de temps chacun des phénomènes :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - \operatorname{div}(D \nabla \tilde{u}) = 0 & (L) \\ \tilde{u}(0, \cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}, \text{ résoudre sur un pas de temps } \delta t$$

Puis on résout :

$$\begin{cases} \partial_t v = f(v) & (NL) \\ v(0, \cdot) = u(\delta t, \cdot) \end{cases}$$

Et  $v(\delta t, \cdot)$  approche  $u(\delta t, \cdot)$  avec une erreur en  $O(\delta t^2)$ . C'est une méthode de splitting d'ordre 1.

Avantage: • le système (L) est linéaire et  $\delta t$  aura été choisi pour s'adapter à l'échelle de diffusion.  
• La résolution des termes non linéaires (réactifs) dans (NL) se résout localement spatialement (avantage pour la parallélisation) et on peut adapter la résolution de (NL)

avec des sous-pas de temps pour s'adapter à l'échelle de temps réactive.

## Splitting d'ordre 1 et 2.

On considère le système linéaire de grande taille :

$$W'(t) = A U(t) + B W(t)$$

$$W(t) \in \mathbb{R}^m, \quad W(0) = W_0$$

La solution "théorique" du pb :

$$U(t) = e^{t(A+B)} W_0$$

$$e^A = \text{Id} + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^p}{p!} + \dots$$

Le splitting vu précédemment consiste à résoudre :

$$\tilde{U}' = A \tilde{U}$$

$$\tilde{U}(0) = W_0$$

$$\tilde{U}' = B \tilde{U}$$

$$\tilde{U}(0) = \tilde{U}(t)$$

$\tilde{U}(t)$  approche  $U(t)$  pour  $t$  petit

$$\hat{\tilde{U}}(t) = e^{tB} \tilde{U}(t) = e^{tB} e^{tA} W_0$$

$$\text{Or } U(t) = e^{t(A+B)} W_0$$

$\neq e^{tB} e^{tA} W_0$   
sauf si  $A$  et  $B$  commutent

Pour  $t$  petit :

$$e^{tA} = \text{Id} + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + O(t^3)$$

$$e^{tB} = \text{Id} + tB + \frac{t^2}{2} B^2 + O(t^3)$$

$$e^{t(A+B)} = \text{Id} + t(A+B) + \frac{t^2}{2} (A^2 + B^2 + AB + BA) + O(t^3)$$
 et on a :

$$e^{tB} e^{tA} = \text{Id} + t(A+B) + \frac{t^2}{2} (A^2 + B^2 + 2BA) + O(t^3)$$

$$e^{tB} e^{tA} - e^{t(A+B)} = \frac{t^2}{2} (BA - AB) + O(t^3) \\ = -\frac{t^2}{2} [A, B] + O(t^3)$$

## • Splitting de Strang (ordre 2)

La technique consiste à résoudre :

$$e^{\frac{1}{2}tA} e^{tB} e^{\frac{1}{2}tA}$$

$$e^{\frac{1}{2}tA} e^{tB} e^{\frac{1}{2}tA} - e^{t(A+B)} \\ = O(t^3)$$

Remarque : Cette technique de Splitting s'étend au pb non linéaire sans surcoût.

## Chap 3

### Problème d'advection.

I Advection sur espace non borné.

On s'intéresse à un phénomène de transport sous l'effet d'un champ de vitesse  $V(t, x)$ .

L'éq d'advection, ou transport, s'écrit :

$$\partial_t u + V \cdot \nabla u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d.$$

avec  $V(t, x) \in \mathbb{R}^d$ .

$u(t, x)$  : la quantité transportée.

Cette équation coïncide avec une éq. de conservation de masse seulement si  $\operatorname{div} V = 0$ .

Eq de conservation de  $u$  :

$$\partial_t u + \operatorname{div}(Vu) = 0.$$

$$\hookrightarrow = (\operatorname{div} V)u + V \cdot \nabla u$$

1) Eq. des caractéristiques.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$   
On cherche une courbe :  $t \rightarrow x(t)$  paramétrée par le temps  $t$ , sur laquelle on peut résoudre l'EDP considérée par la résolu<sup>n</sup> d'une EDO. Pour l'EDP d'advection,

le scalaire sera constante sur cette courbe, appelée caractéristique.

Soit  $x(t)$  donné, on injecte  $u(t, x(t))$  dans l'EDP:

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \underbrace{\partial_t u}_{\mathbb{R}^d} + \underbrace{x'(t) \cdot \nabla_x u}_{\mathbb{R}^d}$$

Si on choisit  $x'(t) = V(t, x(t))$ ,

alors si  $u$  est scalaire de l'EDP ( $\partial_t u + V \cdot \nabla_x u = 0$ ) on a :

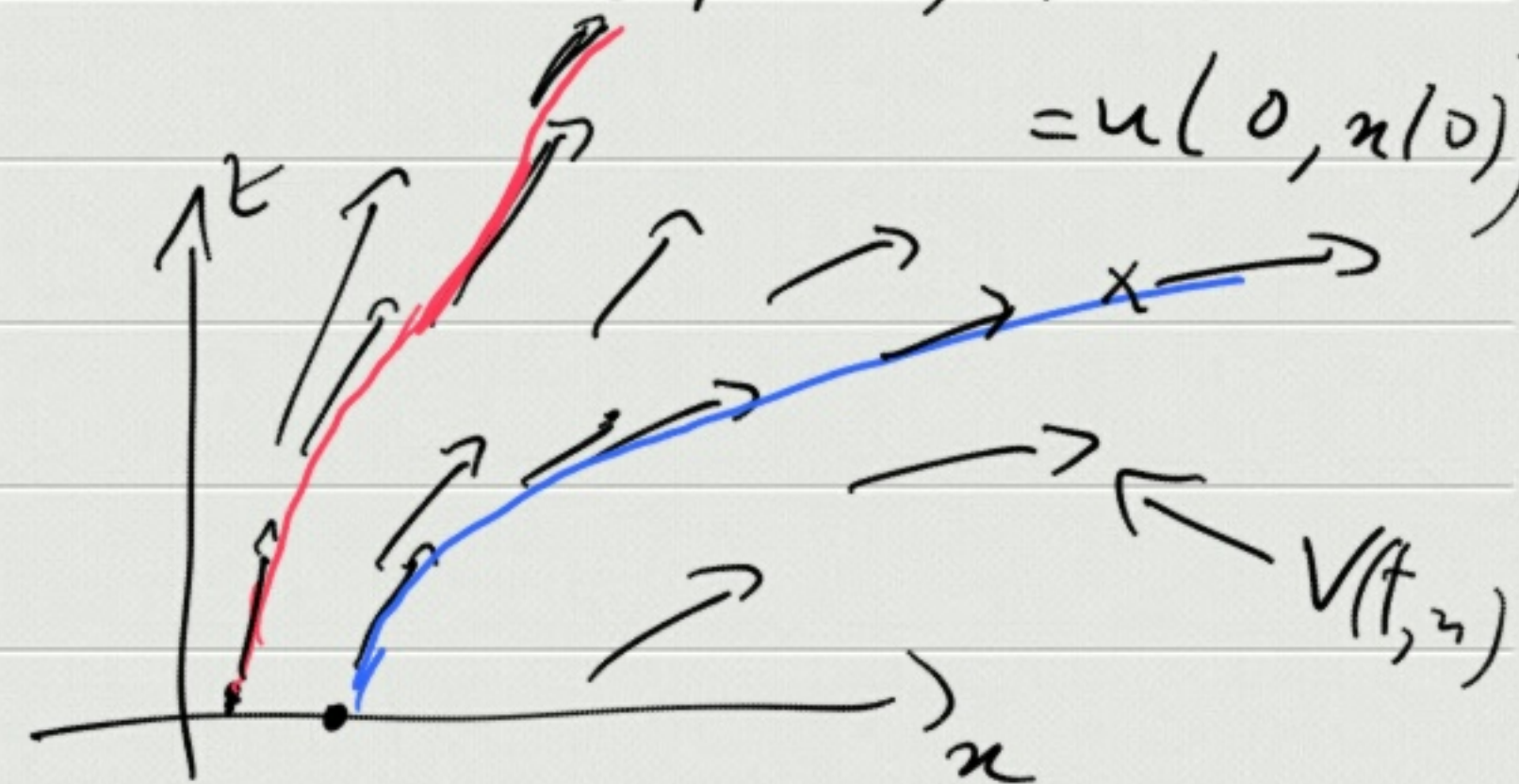
$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = 0$$

Ainsi, le long des courbes

$$\text{vérifiant } x'(t) = V(t, x(t))$$

$$\text{On a } u(t, x(t)) = \text{cte}$$

$$= u(0, x(0))$$



2) Cas 1D,  $V = \text{cte}$ .

Dans le cas 1D, à vitesse constante, l'EDP s'écrit

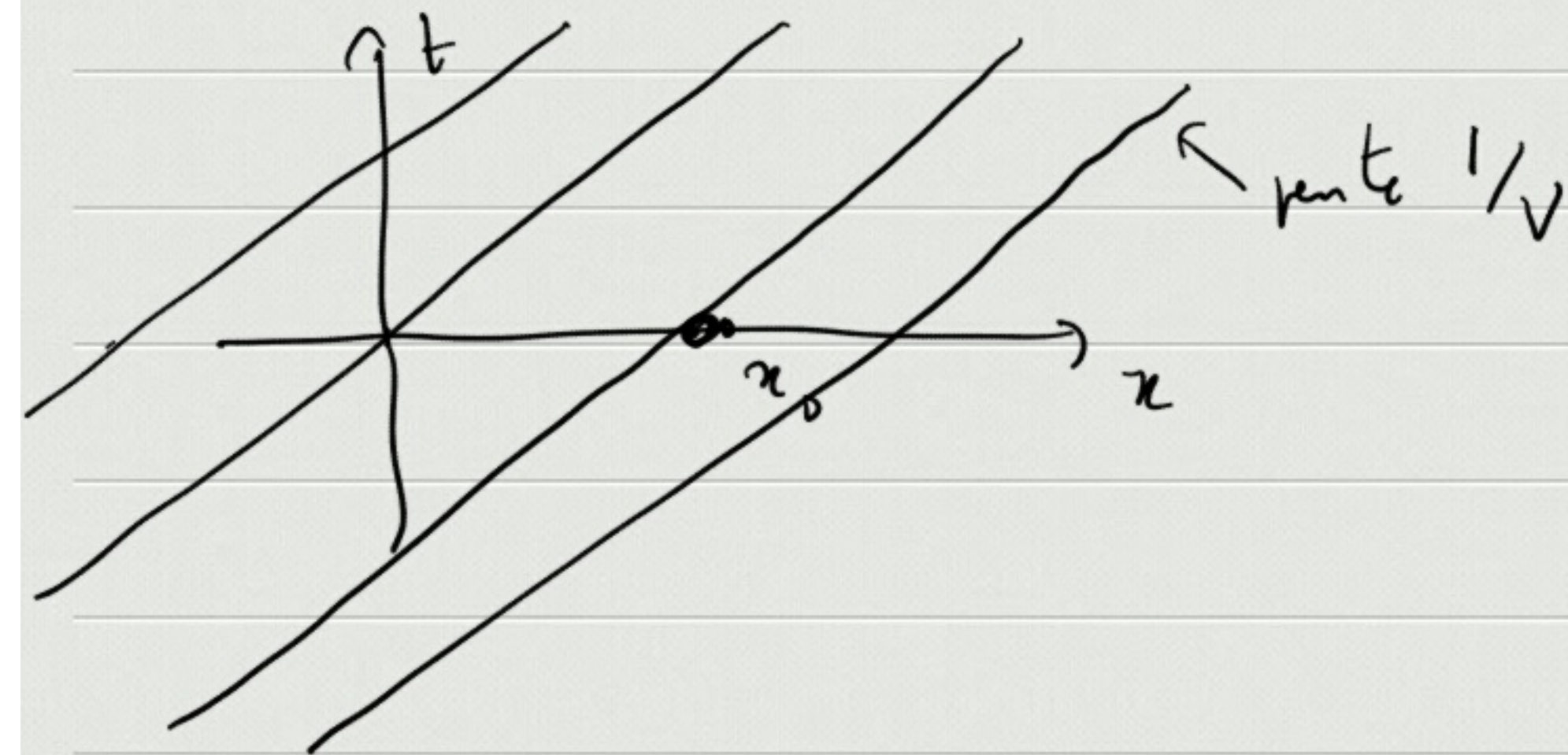
$$\partial_t u + V \partial_x u = 0$$



Eq des caractéristiques:

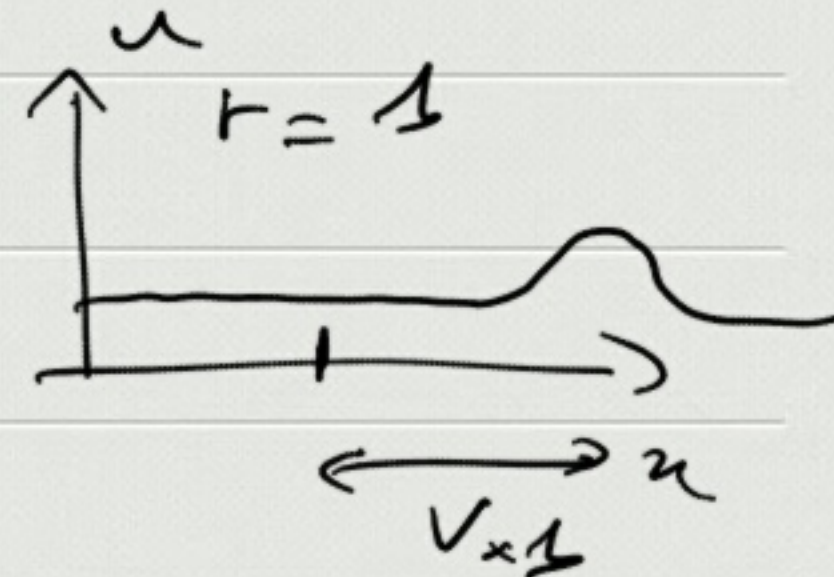
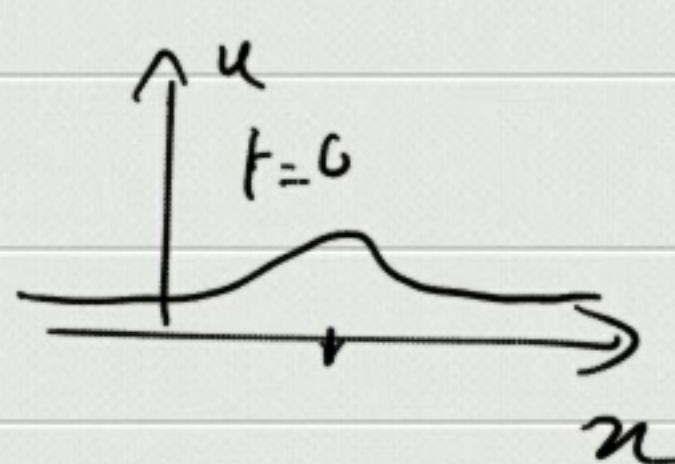
$$x'(t) = V$$

Soit  $x(t) = x_0 + Vt \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ .



$$u(t, x) = u(0, x - Vt)$$

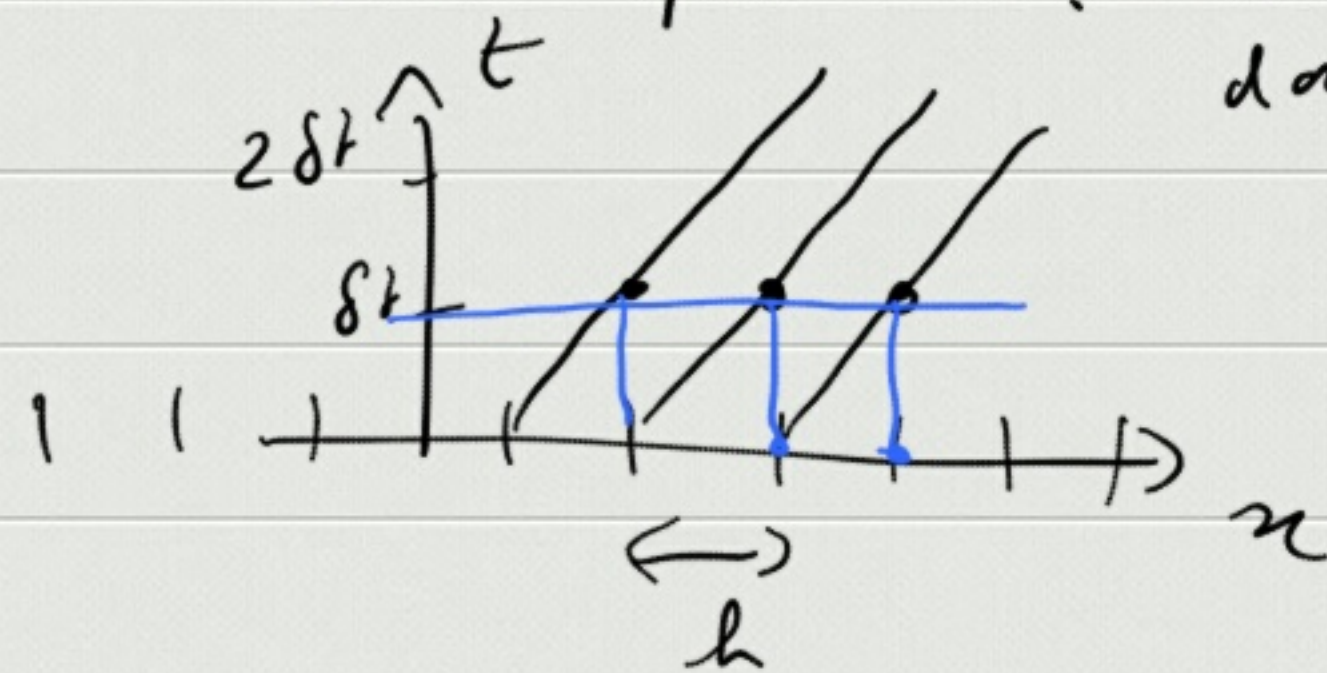
d'après l'éq des caractéristiques.



( $V > 0$  sur l'exemple)

• Schéma exact pour 1D,  $u(0, x)$  donné.

Si  $V > 0$



En choisissant bien  $\delta t$ , on peut faire

$$\text{en sorte que } u(t + \delta t, x) = u(t, x - h) \\ = u(t, x - v\delta t)$$

Il suffit de choisir  $v\delta t = h$ .

$$\text{ie } \boxed{\delta t = \frac{h}{v}}$$

Avec la notation  $u_i^m = u(m\delta t, x_i)$

avec  $x_{i+1} - x_i = h$ .

$$u_i^{m+1} = u_{i-1}^m$$

On va partir de l'EDP et

d'une discrétisation arbitraire pour retrouver le schéma exact

lorsque  $\delta t = h/v$ :

$$\partial_t u(t_n, x_i) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t}$$

Si  $v > 0$

$$\partial_x u(t_n, x_i) = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}$$

On construit ainsi un schéma explicite:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + v \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

$$u_i^{m+1} = \left(1 - \frac{\delta t V}{h}\right) u_i^m + \frac{\delta t V}{h} u_{i-1}^m \quad (S)$$

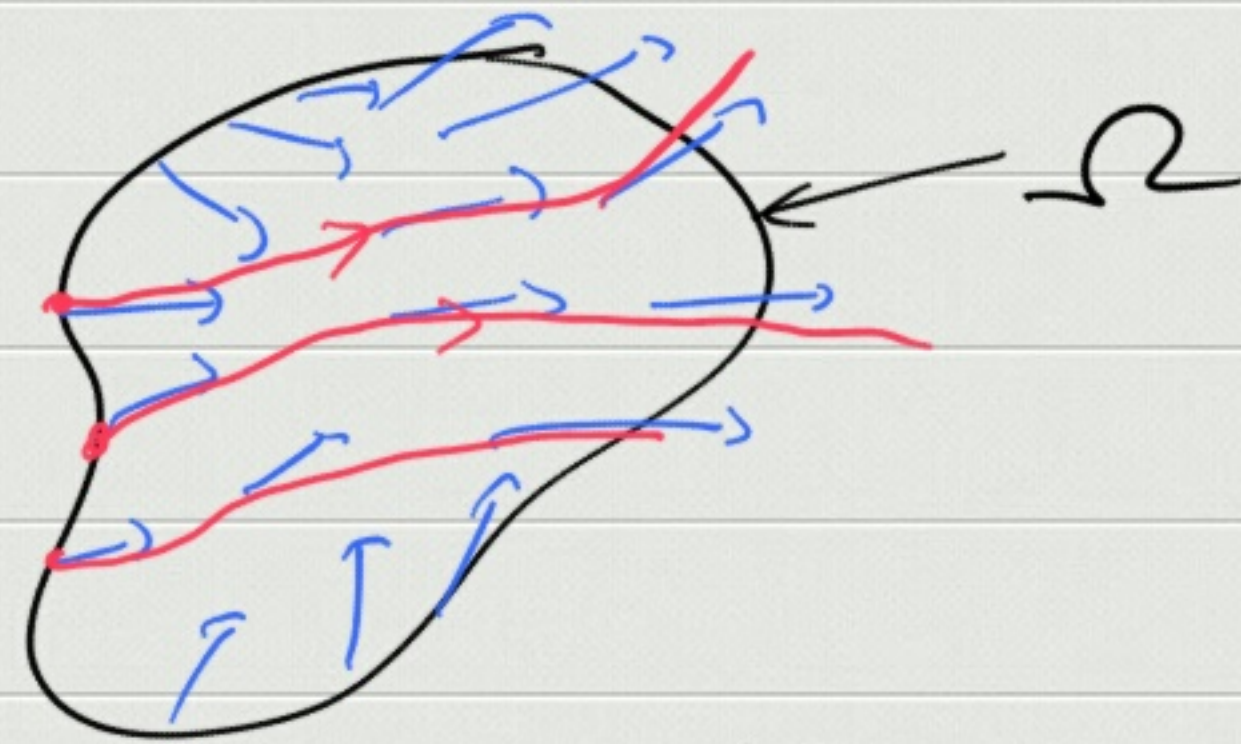
Si  $\frac{\delta t V}{h} = \frac{h}{V}$ , on retrouve le schéma exacte.

Rqve : Si  $\delta t \leq \frac{h}{V}$ ,  $u_i^{m+1}$  est une combinaison convexe de  $u_i^m$  et  $u_{i-1}^m$ . Donc le schéma (S)

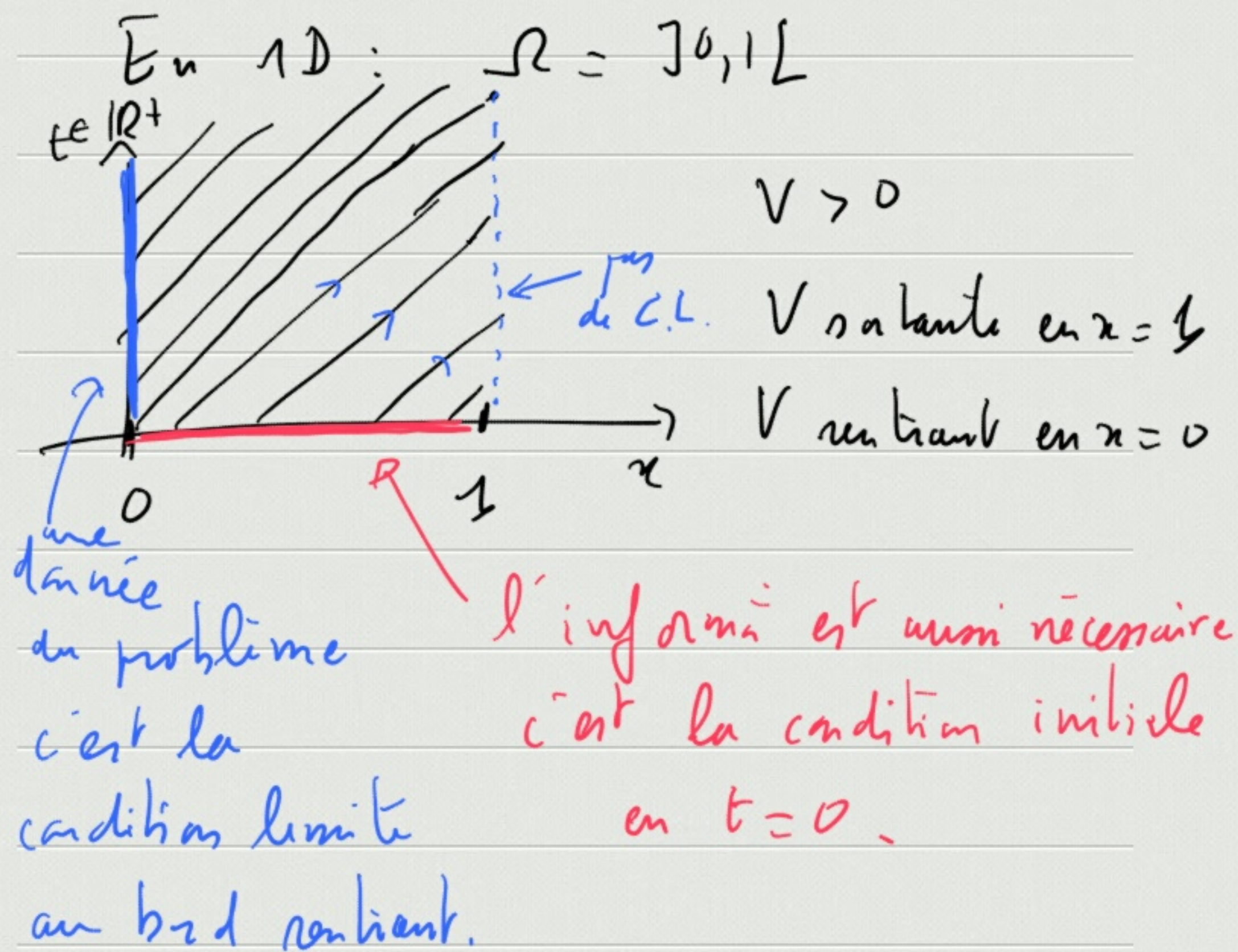
respecte le principe du max si  $\delta t \leq h/V$ , et est donc  $L^\infty$ -stable.

## II Advection sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ .

On veut résoudre la  $\tilde{m}$  EDP sur  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$  ( $\partial(t, x)$ )



On peut appliquer la méthode des caractéristiques et constater qu'aucune information n'est nécessaire là où  $V$  est sortant du domaine. En revanche, il faut connaître  $u$  là où  $V$  est entrant.



Le pb d'advection sur  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$   
 dit donc s'écrit :

$$\begin{cases}
 \partial_t u + V \cdot \nabla u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\
 \underline{u(0, x) = u_0(x)} & \text{(C.I), } x \in \Omega \\
 \underline{u(t, x) = u_b(x)} & \text{(C.L), } \\
 & x \in \partial \Omega(t), t \in \mathbb{R}^+
 \end{cases}$$

$$\partial \Omega(t) \left\{ x \in \partial \Omega \text{ tq } V(t, x) \cdot n < 0 \right\}$$

III Analyse de stabilité par Fourier discret.

On se donne  $u(x)$  une fonction périodique définie sur un domaine périodique  $(0,1)$

On a la décomposition en Fourier discret:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{2i\pi k x}$$
$$\text{et } \hat{u}_k = \int_0^1 u(x) e^{-2i\pi k x} dx$$

On dispose de la formule de Plancherel:

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx = \sum_k |\hat{u}_k|^2$$

Ainsi, pour assurer la stabilité  $L^2$  d'un schéma en temps et en espace

il suffira de contrôler

$|\hat{u}_k|$  au cours des itérations en temps ( $\searrow$ ).

Les calculs de stabilité seront simplifiés car:

$v(x) = u(x+h)$  vérifie:

$$\hat{v}_k = \hat{u}_k e^{2i\pi k h}$$

Exercice: étudier la stabilité  $L^2$  du schéma (S)

$$(N=1) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

En passant en Fourier discret:  $\forall k \in \mathbb{Z}$ :

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^n}{\delta t} + \frac{\hat{u}_k^n - \hat{u}_k^{n-1}}{h} e^{2i\pi kh} = 0$$

$$\text{Soit } \hat{u}_k^{n+1} = \left( 1 - \frac{\delta t}{h} + \frac{\delta t}{h} e^{2i\pi kh} \right) \hat{u}_k^n$$

$$|A|^2 = \left( 1 + \frac{\delta t}{h} (c-1) \right)^2 + \left( \frac{\delta t}{h} s \right)^2$$

$$\text{avec } c = \cos(2\pi kh) \quad s = \sin(2\pi kh)$$

$$\begin{aligned} |A|^2 &= 1 + \left( \frac{\delta t}{h} \right)^2 (c-1)^2 + 2 \frac{\delta t}{h} (c-1) + \left( \frac{\delta t}{h} \right)^2 s^2 \\ &= 1 + \left( \frac{\delta t}{h} \right)^2 - 2c \left( \frac{\delta t}{h} \right)^2 + 2 \frac{\delta t}{h} (c-1) \end{aligned}$$

$$|A|^2 = 1 + 2 \left( \frac{\delta t}{h} \right)^2 (1-c) + 2 \frac{\delta t}{h} (c-1)$$

$$= 1 - 2 \frac{\delta t}{h} (1-c) \left( 1 - \frac{\delta t}{h} \right)$$

On conclut que le schéma proposé est  $L^2$  stable sous la CFL  $\delta t \leq h$ .

Schéma de Richardson:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n \left( 1 + \frac{\delta t}{2h} \left( e^{-2i\pi kh} - e^{2i\pi kh} \right) \right)$$

$-2i \sin(2\pi kh)$

Ici le module d'amplification est toujours  $> 1$ !

Ce schéma n'est jamais stable.  
A ne surtout pas utiliser!

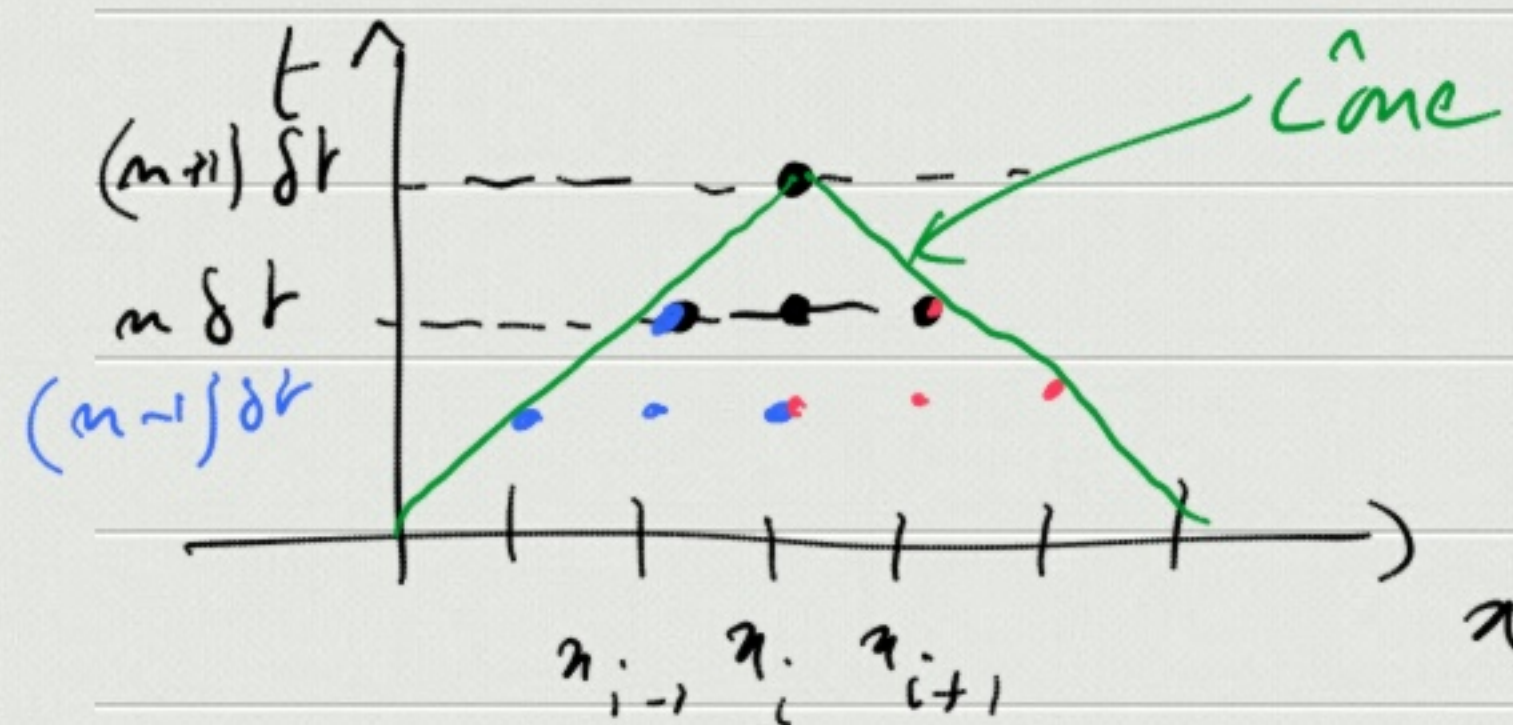
#### IV Cône de dépendance numérique.

##### 1) Définition.

On s'intéresse qu'à des schémas explicite et on veut comprendre comment l'information est propagée par le schéma.

Exple: Avec le schéma précédent:

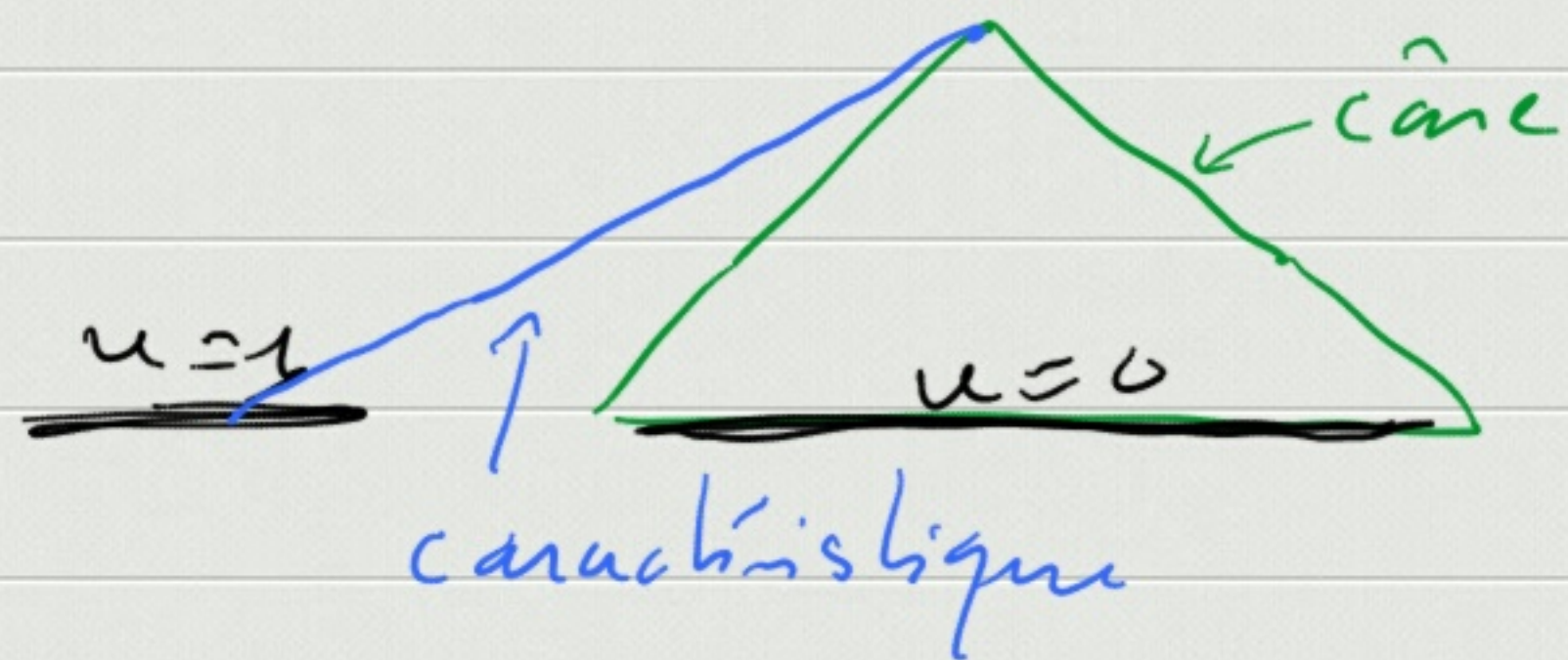
$$u_i^{m+1} = u_i^m + \frac{\delta t}{2h} u_{i-1}^m - \frac{\delta t}{2h} u_{i+1}^m$$



On appellera cône de dépendance numérique le cône de sommet  $(x_i, (n+1)\delta t)$  constitué des pts de grille qui influence  $u_i^{n+1}$ .

Cette notion de cône de dépendance numérique est pertinente pour s'assurer que le cône contient la caractéristique passant par le sommet du cône.

Sinon, on peut fabriquer un contre-exemple de convergence : Si  $\delta t/h$  est fixe, l'angle du cône est inchangé lorsque  $\delta t \rightarrow 0$   
 $h \rightarrow 0$



On devra choisir  $\delta t$ , suffisamment petit par rapport à  $h$  pour ouvrir l'angle du cône et assurer (condition nécessaire de convergence) que le cône contient la caractéristique.





Pour ce schéma, la C.N. est

$$\frac{\delta t}{h} \leq \frac{1}{|v|} \leftarrow \text{pente de la caractéristique}$$

Mais cette condition n'est pas suffisante.

Pour le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} + v \frac{u_{i+2}^m - u_{i-2}^m}{4h} = 0$$

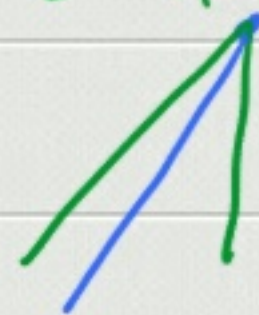
ici la caractéristique est dans le cône si

$$\frac{\delta t}{h} \leq \frac{2}{|v|}$$

Exemple: décentre avant :

$$u_i^{m+1} = u_i^m \left(1 - \frac{\delta t v}{h}\right) + \frac{\delta t v}{h} u_{i-1}^m$$

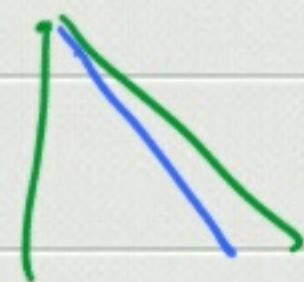
Si  $v > 0$



$$\text{C.N. : } \frac{\delta t v}{h} \leq 1$$

(caract.  $\subset$  cône)

Si  $v < 0$



$$u_i^{m+1} = u_i^m \left(1 + \frac{\delta t v}{h}\right) + \frac{\delta t v}{h} u_{i+1}^m$$
$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} + v \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h} = 0$$

$$\text{C.N. : } \frac{\delta t |v|}{h} \leq 1$$

## V Exemples de schémas.

• Lax-Friedrichs:

$$\frac{2u_i^{n+1} - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta t} + V \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0$$

• stabilité  $L^2$ ?

• consistance?  $\rightarrow$  approche  $\partial_t u + V \partial_x u = 0$ ??

Schéma

• Lax-Wendroff construit sur une discrétisation

centrée en espace de:

$$\partial_t u + V \partial_x u - \frac{(V^2 \delta t)}{2} \partial_{xx}^2 u = 0$$

Par les formules de Taylor en D.L.:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \delta t \underbrace{\partial_t u_i^n}_{-V \partial_x u_i^n} + \frac{\delta t^2}{2} \underbrace{\partial_{tt}^2 u_i^n}_{V^2 \partial_{xx}^2 u_i^n} + O(\delta t^3)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\delta t V}{2h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + O(h^2) + \frac{\delta t^2 V^2}{2} \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + O(\delta t^3)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + V \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{\delta t V^2}{2} \frac{-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n}{h^2} = 0$$

$\hookrightarrow$  Lax-Wendroff.  $= O(h^2/\delta t + \delta t^2)$

$$|A_k|^2 = 1 + \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c)^2 - 2 \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c)^2 + \frac{\delta t^2 V^2 \delta^2}{h^2}$$

$$(1-c)^2 = 1 + c^2 - 2c$$

Montrons la stabilité  $l^2$  de ce schéma:

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^n}{\delta t} + V \frac{e^{2i\pi kh} - e^{-2i\pi kh}}{2h} \hat{u}_k^n + \frac{\delta t V^2}{2h^2} \begin{pmatrix} -e^{-2i\pi kh} & e^{2i\pi kh} \\ e^{-2i\pi kh} & -e^{2i\pi kh} \end{pmatrix} \hat{u}_k^n = 0$$

Soit:  $\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n \left( 1 - \frac{i\delta t \sin(2\pi kh) V}{h} - \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c) \right)$  On pose  $a = \left( \frac{\delta t V}{h} \right)^2$

avec  $s = \sin(2\pi kh)$   $c = \cos(2\pi kh)$

$$|A_k|^2 = 1 - a(1-c) (-4a(1-c) + 3 - c)$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = A_k \hat{u}_k^n \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad |A_k| \leq 1 ?$$

$$|A_k| \leq 1 \Leftrightarrow -4a(1-c) + 3 - c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{3-c}{4(1-c)}$$

$$|A_k| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \leq \inf_{-1 \leq c \leq 1} \frac{3-c}{4(1-c)}$$

$$A_k = 1 + \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c) + i \left( -\frac{\delta t V s}{h} \right)$$

$$|A_k|^2 = \left( 1 + \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c) \right)^2 + \left( \frac{\delta t V s}{h} \right)^2$$

$a_{\min}$

Ainsi, Lax-Wendroff est stable sous

$$\text{la CFL } \boxed{\delta t \leq \frac{h}{V} \sqrt{a_{\min}}}$$

De plus Lax-Wendroff est d'ordre 2 en vérifiant les formules de Taylor pour la solution exacte injectée dans le schéma.

$$\frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\delta t} + V \frac{u(t_n, x_{i+1}) - u(t_n, x_{i-1}))}{h^2} + \dots = E$$

$$\text{avec } \partial_t u + V \partial_x u = 0 \quad \forall (t, x)$$

$$\text{Par les D.L., on trouve } E = O\left(h^k + \frac{\delta t^2}{h \delta t}\right)$$

$$\text{Si } h \sim \delta t \text{ et si } E = O(h^2)$$

On parle de schéma d'ordre 2

en temps et en espace.

VI Exercice.

1) Montrer que le schéma saute-mouton (leap-frog) est stable sous CFL

à préciser pour l'eq  $\partial_t u + \partial_x u = 0$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2 \delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 h} = 0$$

(schéma explicite, centré

en temps et en espace, à

2 pas).

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^{n-1}}{2\delta t} + \frac{\hat{u}_k^n}{2h} \begin{pmatrix} 2i\pi kh & -2i\pi kh \\ e & -e \end{pmatrix} = 0$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^{n-1} - \frac{\delta t}{h} \hat{u}_k^n (2i \sin 2\pi kh)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_k^{n+1} \\ \hat{u}_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^n \\ \hat{u}_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = -2i \frac{\delta t}{h} \sin(2\pi kh)$$

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix} \hat{u}_k^{n+1} \\ \hat{u}_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^n \\ \hat{u}_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Il suffit que la matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ait un rayon spectral  $\leq 1$  pour que la suite  $(\hat{u}_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée

dans  $L^2$ .

2) Schéma de Crank-Nicholson pour le transport

$$\text{Eq: } \partial_t u + V \cdot \nabla u = 0$$

$$V(t, x) \in \mathbb{R}^d \\ x \in \mathbb{R}^d.$$

On pose en Janvier :

$$\hat{u}(t, \zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x)$$

$$\partial_t \hat{u} + \int_{\mathbb{R}^d} (V \cdot \nabla u) = 0$$

si  $V = V(t)$  ind de  $x$

$$\partial_t \hat{u} + iV \cdot \zeta \hat{u} = 0$$

$$\hat{u}(t, \zeta) = \hat{u}(0, \zeta) e^{-iV \cdot \zeta t}$$

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|\hat{u}(0, \cdot)\|_{L^2}$$

On peut faire des calculs similaires par estimai d'energie :

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = 0$$

$$\times u \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} :$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \frac{u^2}{2} dx + \int_{\mathbb{R}^d} V \cdot \nabla u u dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div} V u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} V \cdot \nabla u u dx$$

Si  $\boxed{\operatorname{div} V = 0}$  alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} V \cdot \nabla u u dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div} V u^2 dx = 0$$

$$\text{D'où } \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx = 0$$

Soit le schéma de C.N:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + V \cdot \nabla \frac{u^n + u^{n+1}}{2} = 0$$

On multiplie par  $\underbrace{u^n + u^{n+1}}_{u^\#}$  et on intègre :

$$\frac{1}{\delta t} \int_{\mathbb{R}^d} |u^{n+1}|^2 - |u^n|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} V \cdot \nabla u^\# u^\# = 0$$

$= -\frac{1}{2}$  idem si  $\text{div} V = 0$   
 $\Rightarrow = 0$

$$\text{D'où } \|u^{n+1}\|_2 = \|u^n\|_2$$

On pourra utiliser ce schéma par exemple lorsque la diffusion et le transport apparaissent simultanément:

$$\partial_t u - d \Delta u + V \cdot \nabla u = 0$$

NRJ:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |u|^2 dx + d \int |\nabla u|^2 dx = \int \text{div} V u^2$$

3) loi de Fick diffusée

Fick:  $F = -\nabla u$

$$\partial_t u + \text{div} F = 0$$

Fide modélie :

$$F - \varepsilon \Delta F = -\nabla u$$

$$\partial_t u + \operatorname{div} F = 0$$

en Fourier spatial :

$$\hat{F} + \varepsilon |\zeta|^2 \hat{F} = -i \zeta \hat{u}$$

$$\partial_t \hat{u} + i \zeta \cdot \hat{F} = 0$$

$$\hat{F} = \frac{-i \zeta \hat{u}}{1 + \varepsilon |\zeta|^2}$$

$$\varepsilon \ll 1$$

$$\varepsilon > 0$$

$$\partial_t \hat{u} + \frac{|\zeta|^2}{1 + \varepsilon |\zeta|^2} \hat{u} = 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} > \frac{|\zeta|^2}{1 + \varepsilon |\zeta|^2} > 0$$

On n'a plus d'effets régularisants  
et on peut résoudre en  $t \searrow 0$ .