Optimisation numérique

Objectifs: méthodes pour résoudre des pbs d'optimisation le plus souvent convexe sous contraintes.

Applications visées: - écoulements incompressibles
- Navier-Stokes.
- contraintes objets rigides dans l'écoulement.

Biblio: Web: optimisation et (contrôle)

Allaire, CMAPX, A. Numérique et optimisation.

- Bergounioux: "Optimisation et contrôle des sys. linéaires" (dimension finie)
- Culioli, Introduction à l'optimisation.

Exemple d'optimisation en dim infinie :

Obstacle pour une membrane.

Ω une membrane élastique

$x \in \Omega$: $v(x)$ déplacement transverse de Ω

energie potentielle de déformation :

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla v|^2}\,dx$$

$$\sim \nabla v \text{ petit } \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 dx + \text{cte}$$

Energie associée à l'élasticité $\frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2 dx$

NRJ associée à une force extérieure

$$-\int_\Omega f v\,dx$$

$\mathcal{E}(v)$: energie totale :

$$\mathcal{E}(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \frac{1}{2}|v|^2 dx - \int_\Omega f v\,dx$$

On minimise $\mathcal{E}$ sur un espace

$$K = \{ v \in H,\ \psi(x) \le v(x) \le \varphi(x) \}$$

Exemple du problème de Stokes :

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$: domaine fluide.

$u(x) \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$; u : vitesse en x.

$$\int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx$$

On cherche l'écoulement stationnaire qui minimise la dissipation visqueuse (pas d'effet d'inertie ici) sous la contrainte :

$$u \in V = \left\{ v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \ \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \sum_i \partial_i v_i$$

Plan : - Optimisation en dim finie et algo.

- Optimisation en dim qcq.

- —— sous contrainte convexe.

- — — — non convexe.

- Dualité.

- Méthode de projection (splitting)

Chap 1

Algorithme et optimisation en dimension finie

I Rappel et notation.

def : f est α-convexe sur un ensemble convexe U si $\exists \alpha > 0$, $\forall \lambda \in [0,1]$
$\forall (x,y) \in U^2$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq$
$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{\alpha}{2} \lambda (1-\lambda) \|x-y\|^2$
(lié à la notion d'ellipticité).

Si f est C^1
f est est α convexe ssi
$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2$$
si,
$$(f'(y) - f'(x))(y-x) \geq \underbrace{\frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2}_{?}$$
(exo à vérifier).
(α-monotonie def')

def : Coercivité : f est coercive si elle est définie sur un espace non borné et $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$

II Rappel du thm d'existence.

Thm 1 : K compact de $\mathbb{R}^d$, $f : K \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Thm 2 : $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et coercive alors f est minorée et atteint son min.

Thm 3 : U convexe de $\mathbb{R}^d$: $f : U \to \mathbb{R}$ convexe.

- Si x_0 est un minimum local alors il est global.
- Si f est strict convexe, alors elle admet au plus un minimum.
- si f est C^1 alors x_0 réalise le min $\iff \forall y \in U \quad f'(x_0)(y - x_0) \geq 0$



III Algorithmes

Un algorithme consiste à construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui a vocation à converger vers $\begin{cases}\text{la}\\ \text{une}\end{cases}$ solution d'un pb de minimisa°.

1) Méthode de relaxation.

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

On cherche à minimiser f en se ramenant à une minimisa° en dimension 1.

1) On se donne n directions distinctes $(d_1, \dots, d_n)$ formé une base de $\mathbb{R}^n$.
2) On se fixe $u_0 \in \mathbb{R}^n$
3) Connaissant u_k, on cherche u_{k+1} de sorte que

$$u_{k+1} = u_k + \rho_k d_k$$

$d_k = d_{k[n]}$ $\quad \rho_k$ minimise $\rho \longrightarrow f(u_k + \rho d_k)$

Thm : Si f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et si f est α-convexe, alors la méthode de relaxa° converge.

preuve : - $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$

par construction

- $(f(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ↘ minorée (car f minorée).

donc convergente.

- $f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) \geq \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2$

si $x = u_{k+1}$, $y = u_k$

$f(u_k) - f(u_{k+1}) + f'(u_{k+1})(t_k d_k) \geq \frac{\alpha}{2}\|u_{k+1} - u_k\|^2$

or $f'(u_{k+1})(d_k) = 0$ par construction

$f(u_k) - f(u_{k+1}) \geq \frac{\alpha}{2}\|u_{k+1} - u_k\|^2$

$f(u_k) - f(u_{k+1}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \|u_{k+1} - u_k\| \to 0$

$\lim_{k \to +\infty} \|u_{k+1} - u_k\| = 0$

$\lim_{k \to +\infty} \|u_{k+m} - u_k\| = 0$

$1 \leq m \leq n$.

car $\|u_{k+m} - u_k\|$

$\leq \|u_{k+m} - u_{k+m-1}\|$

$+ \|u_{k+m-1} - u_{k+m-2}\|$

$+ \dots + \|u_{k+1} - u_k\|$

- Montrons que $f'(u_k) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$.

$(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée car f est coercive puisque α-convexe.

$$f'(u_k)(d_{k-1}) = 0$$

On en déduit $f'(u_k)(d_p) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

$\forall 1 \leq p \leq n.$

par continuité de f', la proximité de u_k et u_{k+1} tq $f'(u_{k+1})(d_p) = 0$

- Montrons que u_k converge vers le min de f noté $\underline{u}$.

On exploite l'α-monotonie de f

$$\| \| \Rightarrow \left(f'(u_k) - f'(\underline{u})\right)(u_k - \underline{u}) \geq \alpha \| u_k - \underline{u} \|^2$$

$$\hookrightarrow \| f'(u_k) - f'(\underline{u}) \| \geq \alpha \| u_k - \underline{u} \|$$

$f'(u_k) \to 0$ et $f'(\underline{u}) = 0$

□

Rque : Si $f(u) = \frac{1}{2}(Au|u)_{\mathbb{R}^n} - (b|u)_{\mathbb{R}^n}$ avec A def positive, la méthode de relaxation revient à la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution de $Au = b$ (si A symétrique)

2) Méthode de descente

2.1) La méthode du gradient à pas optimal

- On se donne $u_0 \in \mathbb{R}^n$
- à $u_k \in \mathbb{R}^n$ donné, on cherche le minimum de $\rho \longrightarrow f(u_k - \rho \nabla f(u_k))$
- u_{k+1} est ce minimum (ou un minimum) $u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla f(u_k)$

Thm Si f est $C^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et α-convexe, alors la méthode de gradient à pas optimal converge.

preuve : . $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ par construction

$\Rightarrow (f(u_k))_k \searrow$ minorée car f convexe et donc convergente

On en déduit de plus

que $(u_k)_k$ est bornée car f est coercive.

- Montrons que $\nabla f(u_k) \perp \nabla f(u_{k+1})$.

$f'(u_{k+1})\left(\nabla f(u_k)\right) = 0$ car

u_{k+1} réalise le min de la direction $\nabla f(u_k)$.

ie $\nabla f(u_{k+1}) \cdot \nabla f(u_k) = 0$.

De plus $u_{k+1} - u_k = -\ell_k \nabla f(u_k)$

Donc $\nabla f(u_{k+1}) \perp u_{k+1} - u_k$.

- $f(u_k) - f(u_{k+1}) - f'(u_{k+1})(u_k - u_{k+1})$

$\geq \alpha \| u_{k+1} - u_k \|^2$

Or $f'(u_{k+1})(u_k - u_{k+1}) = 0$

Or $f(u_k) - f(u_{k+1}) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

Donc $\| u_{k+1} - u_k \| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

- Montrons que $\nabla f(u_k) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

$\| \nabla f(u_k) \|^2 = \nabla f(u_k) \cdot \left(\nabla f(u_k) - \nabla f(u_{k+1}) \right)$

$\leq \| \nabla f(u_k) \| \, \| \nabla f(u_k) - \nabla f(u_{k+1}) \|$

$\leq \| \nabla f(u_k) \| \sup_{\text{borné}} \| \nabla f \| \, \| u_{k+1} - u_k \|$

Ainsi $\|\nabla f(u_k)\| \leq C \|u_{k+1} - u_k\|$

$\downarrow k \to +\infty$

0

- On note $\underline{u}$ l'unique min de f

$$\left(f'(\underline{u}) - f'(u_k)\right)\left(\underline{u} - u_k\right) \geq \alpha \|\underline{u} - u_k\|^2$$

$\hookrightarrow \quad \|\nabla f(u_k)\| \geq \alpha \|\underline{u} - u_k\|$ □

2.1) Algorithme du gradient conjugué.

a) u_0 donné dans $\mathbb{R}^n$.

b) $d_0 = \nabla f(u_0)$

c) à l'étape k :

ρ_{k+1} minimise $\rho \to f(u_k - \rho d_k)$

$u_{k+1} = u_k - \rho_{k+1} d_k$

$$d_{k+1} = \nabla f(u_{k+1}) + \frac{\nabla f(u_{k+1}) \cdot \nabla f(u_{k+1} - \rho_k \nabla f(u_k))}{\|\nabla f(u_k)\|^2} d_k$$

Thm : Si f est $\mathcal{C}^2$ et α-convexe, l'algo du gradient conjugué converge.

étape de preuve : - $f(u_k) \searrow$ minoré

- $\nabla f(u_{k+1}) \perp d_k$

- $g(u_k) = \nabla f(u_{k+1})$

$\| g(u_k) \| \leq C \| g(u_{k+1}) - g(u_k) \|$

- $\| g(u_{k+1}) - g(u_k) \| \to 0$

exo : reconstituer la preuve.

Chap 2 Optimisation en dimension infinie.

Le but est d'étendre, au cas des espaces de Banach reflexifs les théorèmes généraux d'optimisation rappelés en dimension finie.

I Théorème généraux.

thm : Si E un espace de Banach reflexif, U un ensemble faiblement fermé de E et borné.

On suppose $J : W \to \mathbb{R}$ faiblement s.c.i (semi-continue inférieurement).
Alors J admet au moins un minimum sur W.

preuve : $l = \inf_{v \in W} J(v)$

Soit $(v_n)_n$ une suite minimisante de W $\lim_{n \to +\infty} J(v_n) = l$

W borné $\Rightarrow$ W faiblement compact

ie $v_{n_k} \xrightarrow{k \to +\infty} u$ dans E

or $u \in W$ car W est faiblement fermé.

- J est f.s.c.i

$J(u) \leq \liminf J(v_{n_k}) = l$

Donc $J(u) = l$ avec $u \in W$.

Rque : On peut se passer de l'hyp W borné si on suppose J coercive.

$W_0 = \{u \in W / J(u) \leq J(u_0)\}$ $u_0 \in W$ ☐

Thm : Soit E un Banach reflexif, K un ensemble convexe fermé de E.
On suppose J strictement convexe,

$J : E \to \mathbb{R}$, et

J coercive.

Alors, J admet un unique minimum sur K

preuve : J continue → sci

J sci et convexe → faiblement sci

K convexe fermé alors

K est faiblement fermé.

II Exemples d'optimisation.

1) Equation de Laplace

Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$

Soit $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx$$

thm : J est minorée sur $H_0^1(\Omega)$ et atteint son min caractérisé par

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et $u_{|\partial\Omega} = 0$ (car $u \in H_0^1(\Omega)$)

preuve : on montre que J est α-convexe sur $H_0^1(\Omega)$.

On calcule $J''(u)(v,v)$

$$= \int |\nabla v|^2 dx = \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

2) Exemple des rayons lumineux.

Soit $n : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ C^∞ avec

$$n(a) \geq \alpha > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3.$$

$$E = \left\{ u \in H^1([0,1];\mathbb{R}^3) \;/\; u(0) = A,\ u(1) = B \right\}$$

$$J(u) = \int_0^1 n(u(t)) \left| u'(t) \right|^2 dt$$

Thm : Il existe $u \in E$ qui minimise J sur E. De plus $u \in C^\infty \cap E$ et vérifie

$$-2\left(n(u(t))\, u'(t)\right)' + |u'|^2 n'(u(t)) = 0$$

preuve : On considère une suite minimisante $(u_k)_k$.

$$\lim_{k \to +\infty} J(u_k) = \inf J$$

- $(u_k)_k$ est bornée dans H^1 :

$$K \geq J(u_k) \geq \alpha \int_0^1 |u_k'(t)|^2 dt \quad (*)$$

$u_k = \ell + v_k$ avec ℓ affine telle que $\ell(0) = A$, $\ell(1) = B$. ($\ell \in H^1$) et $v_k \in H_0^1(0,1)$ par $(*)$.

. Comme H^1 est un espace de Banach reflexif, $u_{n_k} \rightharpoonup u$ ds H^1.

$H^1 \underset{c}{\hookrightarrow} C^0$

$w_k = \sqrt{n(u_k)}\, u_k'$

$w_{n_k} \longrightarrow \sqrt{n(u)}\, u'$ f. dans L^2

$u \longrightarrow \|u\|_{L^2}^2$ est f. s.c.i.

$$\left\| \sqrt{n(u)}\, u' \right\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \to +\infty} \int (w_{n_k})^2 \, dx$$

$\|$

$J(u)$ donc u minimise J.

Caractérisation du min :

$$J'(u)(v) = \int_0^1 n'(u(t))\, v(t)\, |u'(t)|^2 \, dt + 2\int_0^1 n(u(t))\, u' v' \, dt$$

Ainsi $-2\left(n(u(t))\, u'(t)\right)' + n'(u(t))\, (u'(t))^2 = 0$

dans $\mathcal{D}'$.

$u \in H^1(0,1) \hookrightarrow C^0(0,1)$

En lisant l'eq $n'(u(t))\, |u'(t)|^2 \in L^1$

$\Rightarrow n(u(t))\, u'(t) \in W^{1,1}$

Or $W^{1,1} \hookrightarrow L^p \ \forall\, p < \infty$

↳ $u \in W^{1,p}(0,1)$ $\uparrow < +\infty$

(argument de "Bootstrap".

...

Chap 3

Programmation Convexe.

On s'intéresse à des problèmes du type

$$\min_{u \in K} J(u)$$

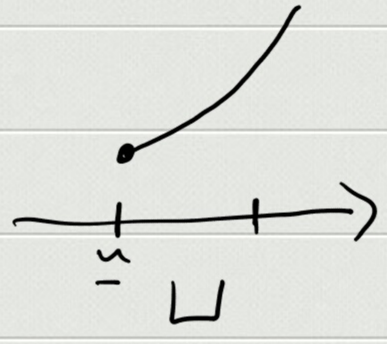
avec K un ensemble convexe d'un espace de Hilbert.
et $J : K \to \mathbb{R}$ convexe.

1) Rappel de caractérisation du min.

Prop : Soit J C^1 convexe

$\underline{u}$ réalise le minimum de J sur le convexe $\mathcal{U}$

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{U},\ J'(\underline{u})(y-\underline{u}) \geq 0$



preuve : $J(\underline{u}) \leq J(u)$

$\forall u \in \mathcal{U}$

$J(\underline{u} + t(u-\underline{u})) \geq J(\underline{u})$

$(\forall t \in]0,1])$

$\dfrac{J(\underline{u} + t(u-\underline{u})) - J(\underline{u})}{t} \geq 0$

$t \to 0$

$J'(\underline{u})(u-\underline{u}) \geq 0$

$\forall u \in \mathcal{U}$.

□

2) Projection sur un convexe

Prop : Soit V un espace de Hilbert, K un convexe fermé de V.

Pour tout $x \in V$, il existe un unique $y \in K$ tel que

$$\|x-y\| = \inf_{z \in K} \|x-z\|$$

On dit que y est la projection (ou le projeté) de x sur K.

$$y = P_K x$$

(C'est une projection orthogonale).

preuve : Soit $\Psi_x : K \to \mathbb{R}$

$$z \to \|x-z\|^2$$

Ψ_x est une fonction strict convexe et continue sur V et donc f. s.c.i.

$(u_k)_k$ une suite minimisante

(u_k) bornée de V.

$\hookrightarrow$ $u_{k_n} \rightharpoonup u$ de V (faible)

Or K est faiblement fermé (car fermé et convexe) donc $u \in K$.

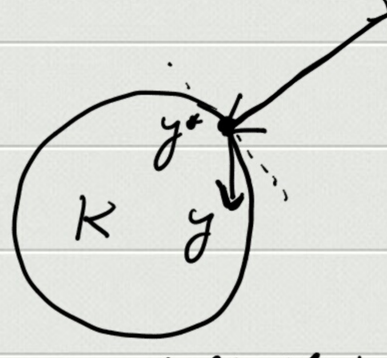
Comme Ψ_x est f. s.c.i,

$$\Psi_x(u) \leq \liminf_n \Psi_x(u_{k_n})$$

L'unicité de u découle de la stricte convexité de ψ_x.

□

Prop $y^* = P_K(x) \iff y^* \in K$ et $\forall y \in K$
$(y^* - x, y - y^*) \geq 0$.



De plus P_K est une projection.

preuve : $\psi_x(y) = \|x-y\|^2$ et caractérisation du min de ψ_x.

de plus $P_K \circ P_K = P_K$.

et P_K est 1-Lipschitz

$(P_K(x) - x, z - P_K(x)) \geq 0$

On choisit $z = P_K(y)$

$(*)$ $(P_K(x) - x, P_K(y) - P_K(x)) \geq 0$

$(P_K(y) - y, z - P_K(y)) \geq 0$

On choisit $z = P_K(x)$.

$(**)$ $(P_K(y) - y, P_K(x) - P_K(y)) \geq 0$

On somme $(*)$ et $(**)$.

$$\Big(P_K(x)-P_K(y)-(x-y),\ P_K(y)-P_K(x)\Big)\geq 0$$

$$\Big(+(x-y),\ P_K(y)-P_K(x)\Big)\geq \|P_K(x)-P_K(y)\|^2$$

$\hookrightarrow \|x-y\|\,\|P_K(y)-P_K(x)\| \geq \|\quad\|^2$

$\hookrightarrow \|x-y\| \geq \|P_K(x)-P_K(y)\|$.

D'où P_K est 1-lip. $\square$.

3) Algorithme du gradient projeté.

Soit K un convexe fermé de V (un espace de Hilbert).

Soit $f: V \to \mathbb{R}$ C^1.

On cherche $\min f_{|K}$.

① on fixe $\rho > 0$. (le pas).

② on se donne x_0 arbitraire de V

③ $x_{k+1} = P_K\left(x_k - \rho \nabla f(x_k)\right)$

Prop : Si $f: V \to \mathbb{R}$ C^1 est convexe et K convexe de V fermé.

si $\bar{x}$ vérifie

$\bar{x} = P_K(\bar{x} - \rho \nabla f(\bar{x}))$ alors

$\bar{x}$ réalise le min de f sur K.

preuve : exo : caractérisation de la projection qui s'interprète comme la caractérisation

du min de K.

Théorème : On suppose que f' est M-lip.

On suppose que f est α-convexe.

Si $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$, l'algorithme du gradient projeté converge vers l'unique solution du pb de minimisation

preuve : On introduit :

$$\Psi : K \longrightarrow K$$
$$x \longrightarrow P_K\left(x - \rho \nabla f(x)\right)$$

On rappelle que $x_{k+1} = \Psi(x_k)$.

On va montrer que Ψ est contractante.

$$\|\Psi(x) - \Psi(y)\|^2 = \| P_K(x - \rho \nabla f(x)) - P_K(y - \rho \nabla f(y))\|^2$$

$$\leq \| x - \rho \nabla f(x) - y + \rho \nabla f(y) \|^2$$

$$\leq \|x-y\|^2 + \rho^2 \| \nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 - 2\rho \underbrace{\left(x - y, \nabla f(x) - \nabla f(y)\right)}_{\geq \alpha \|x-y\|^2}$$

$$\leq \underbrace{\left(1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha\right)}_{< 1 \text{ si } 0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}} \|x-y\|^2$$

Cqfd. □

Rque

Application à Stokes incompressible ?

$$\min_K \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u\, dx}_{J(u)}$$

où $K = \{u \in H_0^1(\Omega) \,/\, \operatorname{div} u = 0\}$

ici J est α-convexe sur $H_0^1(\Omega)$. Mais ∇J n'est pas M-lip.

En discret, par exemple, $V_h \subset H_0^1$ avec V_h dans espace de fonctions affine par morceaux (de taille h)

↳ ∇J M-lip. avec $M \sim \frac{1}{h}$.

ρ est alors fortement contraint par h : $\rho \sim h^2$, ce qui serait d'autant plus pénalisant que h est petit.

4) Méthode de pénalisation.

On va approcher

$$(P) \quad \min_K f$$

par le problème suivant

(P_ε) $\quad \min_{x \in V} f + \frac{1}{\varepsilon}\psi$

où $\varepsilon > 0$ est destiné à être petit.

où $\psi : V \to \mathbb{R}^+$ tq $\psi(x) = 0 \iff x \in K$ (*)

exemple : $\psi(x) = \|x - P_K(x)\|^2$

<u>Thm</u> : On suppose $f : V \to \mathbb{R}$ continue strict^t convexe et coercive et ψ convexe vérifiant (*).

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists ! \, x_\varepsilon$ solu^{n} de (P_ε) et $x_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \bar{x}$ ds Vf.

où $\bar{x}$ est l'unique min de (P).

<u>preuve</u> : • x_ε existe $\forall \varepsilon > 0$.

• $(x_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est borné unif en ε.

$$f_\varepsilon = f + \frac{1}{\varepsilon}\psi$$

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq f_\varepsilon(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$$

avec $\tilde{x} \in K$.

d'où la borne choisi uniforme.

f_ε est faiblement s.c.i car convexe et continue.

$$f_{\varepsilon}(\bar{x}) \leq \liminf_{\varepsilon_n \to 0} f_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) \leq$$

avec $\bar{x}$ la limite de x_{ε_n}.

A-t-on $\bar{x} \in K$?

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\psi(x_\varepsilon) \leq f(y) \quad \forall y \in K$$

On utilise f faiblement s.c.i :

$$f(\bar{x}) \leq f(y) \quad \forall y \in K$$

$$0 \leq \psi(x_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

avec ε indépendant de ε.

$$\psi(\bar{x}) = 0 \quad \text{donc } \bar{x} \in K.$$

Par unicité de $\bar{x}$, toute suite $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers $\bar{x}$.

□

5) Pb de Stokes en écoulement incompressible.

On s'intéresse au pb :

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert connexe

$$\min_{V} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f\cdot u\, dx$$

avec $V = \{ u \in (H^1_0(\Omega))^d \ / \ \operatorname{div} u = 0 \}$

avec $f \in (L^2(\Omega))^d$.

Thm : le pb de minimisation ci-dessus admet une unique solution qui se caractérise par l'EDP :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

avec $u \in (H^1_0(\Omega))^d$, et p est unique dans $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Rque : La variable p qui intervient ici (appelé pression) peut se déduire du lemme de Rham.

On construit ici p par un procédé constructif basé sur un pb d'optimisation pénalisée.

preuve : On introduit le pb de minimisation :

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \int f u\, dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx$$

D'après le thm précédent, on a

u_ε solu du pb

$$(S_\varepsilon) \quad \min_{(H_0^1(\Omega))^d} J_\varepsilon(v)$$

qui converge vers u l'unique minimum de $\min_V J(v)$.

Pour caractériser le min u, on va caractériser le min u_ε de (S_ε) puis passer à la limite en ε.

$$J_\varepsilon'(u_\varepsilon)(v) = 0 = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx$$

$$-\int_\Omega f v \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \operatorname{div} u_\varepsilon \operatorname{div} v \, dx = 0$$

$$\forall v \in (H_0^1(\Omega))^d$$

Soit

$$-\operatorname{div} \nabla u_\varepsilon - f \cdot \frac{1}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \quad \text{ds } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$-\Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \operatorname{div} u_\varepsilon = f \quad \text{ds } L^2(\Omega)$$

On pose $p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} u_\varepsilon$.

$$-\Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f$$

On va expliciter les bornes uniformes en ε sur la solⁿ pour passer à la limite en ε :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J(\tilde{u}) \quad \text{avec } \operatorname{div}\tilde{u}=0$$
$$\leq C \quad \text{ind de } \varepsilon.$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 - \int_\Omega f u_\varepsilon \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C \quad (\#)$$

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int (\operatorname{div} u_\varepsilon)^2 \leq C \quad (3)$$

soit encore $\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\Gamma_\varepsilon|^2 dx \leq C.$

Or $\int_\Omega f u_\varepsilon \leq \|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2}$

$$\leq \|f\|_{L^2} C_0 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}$$

$$\leq \frac{1}{4}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2 + C_0^2\|f\|_{L^2}^2 \quad (2)$$

Donc, (1) et (2) assure que

$$\frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq C_0^2\|f\|_{L^2}^2 + C$$

$(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est unif^{t} bornée ds $\left(H_0^1(\Omega)\right)^d$.

de plus $\operatorname{div} u_\varepsilon \longrightarrow 0$ ds L^2 fort.

d'après (3).

A une sous-suite près on a :

$$u_\varepsilon \longrightarrow \bar{u} \text{ dans } H^1_0(\Omega)$$

D'après le thm précédent $\bar{u} = u$.

Pour passer à la limite sur ∇p_ε, on a besoin d'une estimée uniforme.

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx + \int_\Omega \nabla p_\varepsilon \cdot v \, dx = 0$$

$$\forall\, v \in H^1_0(\Omega).$$

- Montrons que $\|\nabla p_\varepsilon\|_{H^{-1}}$ est bornée unif^{t} en ε.

$$\nabla p_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + f$$

Or $\|\Delta u_\varepsilon\|_{H^{-1}}$

$$= \sup_{\substack{v \in H^1_0(\Omega) \\ \|v\|_{H^1_0} = 1}} \langle \Delta u_\varepsilon, v \rangle_{H^{-1}, H^1_0}$$

$$= \sup \int \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v$$

$$\leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2} \underbrace{\|\nabla v\|_{L^2}}_{\leq 1}$$

$\leq C$ indépendant de ε.

Ainsi, en passant à la limite

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega \nabla p . v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\forall v \in H^1_0(\Omega).$$

où p est une limite de p_ε.

Si on choisit p tq $\int_\Omega p = 0$, alors

$$\|p\|_{L^2} \leq C \|\nabla p\|_{H^{-1}}.$$

(découle de $\|q\|_{L^2} \leq C\left(\left|\int_\Omega q\right| + \|\nabla q\|_{H^{-1}}\right)$)

admis.

Supposons que (u, p_1) et (u, p_2) sont solu° du pb de Stokes avec

$$\int_\Omega p_1 \, dx = \int_\Omega p_2 \, dx.$$

Alors si $q = p_1 - p_2$, on a

$(0, q)$ est solu° de

$$-\Delta 0 + \nabla q = 0 = f - f$$

et $\int_\Omega q = 0$.

Donc $q = cte = 0$

$\downarrow$

sur Ω

$\square$

Rque : la programmation linéaire rentre dans ce cadre, mais dans ce cas on preferera l'algorithme du simplexe.

Chap 4

Optimisation sans contrainte.

La problématique est toujours de minimiser une fonctionnelle sur un ensemble fermé, mais non nécessairement convexe.
On parle de solution admissible lorsque la solution est dans ce fermé.

$$\inf_{v \in K} J(v). \qquad K \subset E$$

Def : C est un cône de sommet x_0 $\Leftrightarrow$

$$\{ z = x_0 + t(x - x_0),\ t \in \mathbb{R}^+ \atop x \in C \} \subset C$$

Def : On appelle cône des directions admissibles l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ $(u \in K)$

Si $(u_k)_k$ une suite d'éléments de K

$u_k \neq u$ et $\lim u_k = u$

tq

$$\mathcal{C}(u) = \{ w \in E \,/\, \exists \varepsilon_k > 0 \ \lim_k \varepsilon_k = 0 \ \lim \frac{1}{\varepsilon_k}(u_k - u) = w \}$$

Prop : Pour tout ensemble K fermé, $u \in K$,
$\mathcal{C}(u)$ est un cône fermé contenant 0.

preuve : exo.

Thm : (Caractérisation du min). Soit $K \neq \emptyset \subset E$
$J : K \to \mathbb{R}$ C^1.
Si u est un minimum local de J
sur K, alors nécessairement,
$\forall w \in \mathcal{C}(u)$, $J'(u)(w) \geq 0$.

preuve : Soit $w \in \mathcal{C}(u)$, $\exists (u_k)_k (\varepsilon_k)_k$
telles que $u_k \neq u$ $\lim_{k \to +\infty} \frac{(u_k - u)}{\varepsilon_k} = w$ $u_k \in K$
$\varepsilon_k > 0$

Pour k assez grand, $J(u_k) \geq J(u)$
$J(u + (u_k - u)) = J(u) + \int_0^1 J'(u + t(u_k - u))(u_k - u)\, dt$

$0 \leq J(u_k) - J(u) = \int_0^1 J'(u + t(u_k - u))(u_k - u)\, dt$

$0 \leq \int_0^1 J'(u + t(u_k - u)) \frac{u_k - u}{\varepsilon_k}\, dt$

$0 \leq J'(u)(w)$

□

I Contrainte égalité.

On introduit un premier résultat (un peu limitatif, vu l'expression des contraintes) :

Thm : On se donne E_1, E_2, G trois espaces de Banach.

Soit $J : E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$.

$g : E_1 \times E_2 \longrightarrow G$ $\mathcal{C}^1$

Soit l'ensemble $K_c = \{u \in E_1 \times E_2,\ g(u) = c\}$

On suppose qu'il existe $\bar{u} \in K_c$ tq

1) $\forall\, u \in K_c \quad J(\bar{u}) \leq J(u)$

2) $\partial_2 g(\bar{u})$ est un isomorphisme de E_2 sur G.

Alors il existe $\lambda \in G'$ tel que

$$J'(\bar{u}) + \lambda(g'(\bar{u})) = 0.$$

preuve : Notons $\bar{u} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

D'après le thm des fonctions implicites $\exists\, \varepsilon, \rho > 0$ et une applica^{n} φ de classe $\mathcal{C}^1$: $B_{E_1}(\bar{x}_1, \varepsilon) \to B_{E_2}(\bar{x}_2, \rho)$ telle que $\forall\, x_1 \in B_{E_1}(\bar{x}_1, \varepsilon)$

$$g(x_1, \varphi(x_1)) = c.$$

$h(x_1) = J(x_1, \varphi(x_1))$ $\quad h'(\bar{x}_1) = 0$

$$\varphi'(\bar{x}_1) = -\left(\partial_2 g(\bar{u})\right)^{-1} \partial_1 g(\bar{u})$$

$$\partial_1 J(\bar{u}) - \partial_2 J(\bar{u}) \left(\partial_2 g(\bar{u})\right)^{-1} \left(\partial_1 g(\bar{u})\right) = 0$$

Soit $\lambda = -\partial_2 J(\bar{u}) \left(\partial_2 g(\bar{u})\right)^{-1}$

$$\partial_1 J(\bar{u}) + \lambda \partial_1 g(\bar{u}) = 0$$

On $\lambda \partial_2 g(\bar{u}) = -\partial_2 J(\bar{u})$

$$\partial_2 J(\bar{u}) + \lambda \partial_2 g(\bar{u}) = 0$$

Soit $J'(\bar{u}) + \lambda g'(\bar{u}) = 0$ $\square$

$J : C^1 ; E \to \mathbb{R}$ $\quad K = \{u \in E / g(u) = 0\}$

Def : Dans le cas $G = \mathbb{R}^m$

$g(x) = (g_1, \dots, g_m)(x)$,

on dit que les contraintes $g(u) = 0$ sont régulières en $\bar{u}$ si

$g_1'(\bar{u}), \dots g_m'(\bar{u})$ sont linéairement indépendants. On dit aussi que $\bar{u}$ est régulier pour les contraintes.

Thm : (condition nécessaire d'optimalité).

Soit $\bar{u}$ un point régulier vérifiant

$\bar{u} \in K \qquad J(\bar{u}) = \inf_{u \in K} J(u)$

alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ réels tels que

$$J'(\bar{u}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k'(\bar{u}) = 0$$

preuve :

Soit $(e_1, \dots e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

Soit u_k tq $g'(\bar{u})(u_k) = e_k$.

Soit $E_2 = \text{Vect}\{u_k\}_{1 \le k \le m}$.

Comme $\{g'_1(\bar{u}), \dots g'_m(\bar{u})\}$ sont linéairt ind. $g'(\bar{u})$ est surj.

donc $\dim E_2 = m$.

Donc g_2 vérifie l'hyp 2) du thm précédent.

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ (on vient de construire E_1 comme le supplémentaire de E_2),

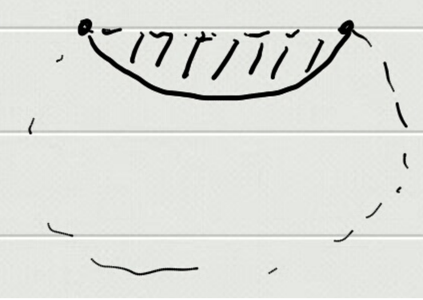
$f(x_1, x_2) = J(x_1 + x_2)$

$h(x_1, x_2) = g(x_1 + x_2)$.

On applique alors le thm précédent.

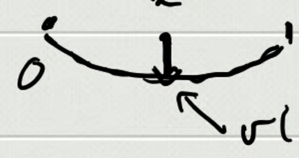
□

Exemple d'applicⁿ : le pb de la reine Didon. Parmi les courbes du plan de longueur l joignant 2 pts trouver celle qui enclôt la surface maximale :



Pour une longueur suffisante mais pas trop longue, le pb admet une solution qui est le graphe d'une fonction.

On minimise $J(v) = -\int_0^{x_1} v(x)\,dx$ $\quad (v(x) \geq 0)$



avec la contrainte $\ell = \int_0^{x_1} \sqrt{1+(v'(x))^2}\,dx$

Une solution optimale, si elle existe, vérifie

$$J'(u) + \lambda\, g'(u) = 0$$

avec $g(u) = \int_0^{x_1} \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx - \ell$

exo : vérifier qu'en dérivant, v satisfait

$$(v(x) - C_2)^2 + (x - C_1)^2 = \lambda^2$$

$$\left(\forall h \in E \quad \int_0^{x_1} h + \lambda \frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} h' = 0 \right.$$

$$\left. \text{ds } \mathcal{D}' \quad 1 - \lambda \left(\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} \right)' = 0 \right)$$

II Contraintes inégalités.

Soit E un espace de Banach.

Soit F une fonction $C^1 : E \to \mathbb{R}^m$.

On considère un ensemble K :

$$K = \{ v \in E,\ F(v) \leq 0 \}$

Def : Y un espace vectoriel, $\mathcal{C} \subset Y$ est un cône de sommet 0 si :

$$\forall \lambda > 0, \ \lambda \mathcal{C} \subset \mathcal{C}.$$

Def : (Cône engendré) Soit B une partie de E, $\mathcal{C}$ est le cône engendré par B si $\mathcal{C} = \left\{ z = \sum \alpha_i x_i, \ \alpha_i \geq 0, \ x_i \in B \right\}$

Lemme : Le cône engendré par p vecteurs de Y est fermé.

Rqm : Si ces p vecteurs forme une famille libre, le cône engendré est isomorphe à $\mathbb{R}_+^m$.

lemme de Farkas : Soit E un Banach réflexif et $\left\{ (l_i)_{1 \leq i \leq n}, l \right\}$ $n+1$ formes linéaires continues sur E.

Si $\forall w \in E$, $\forall i \leq n \ l_i(w) \geq 0 \Rightarrow l(w) \geq 0$

alors $\exists (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \geq 0$ tq $l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i$.

preuve : Soit $\mathcal{C}$ le cône engendré par $(l_i)_{1 \leq i \leq m}$.

Supposons $l \notin \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est un convexe fermé.

En appliquant Hahn-Banach,

$w \in E^{**} = \bar{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\ell(w) < \alpha$$

$\forall f \in \mathcal{C}$ $\quad (f, w) \geq \alpha$.

ie $\left(\sum \beta_i \ell_i(w) \geq \alpha \right)$

$\beta_i \geq 0$

On va montrer que $\alpha \geq 0$.

Sinon on exhibe $\ell_{i_0}(w) < 0$.

En faisant tendre $\beta_i \to +\infty$

et $\alpha \to -\infty$, c'est absurde

Donc $\underline{\alpha \geq 0}$.

Donc $\ell_i(w) \geq \alpha \geq 0$.

Par l'hyp (de la lemme), on déduit

$$\ell(w) \geq 0.$$

On a $\ell(w) < \alpha$.

Donc $\alpha > 0$.

On a $0 \in \mathcal{C}$ donc $0 \geq \alpha > 0$.

absurde.

Donc $\ell \in \mathcal{C}$

□

Def : On appelle $I(u)$ l'ensemble des indices des contraintes actives au point u : $\begin{cases} F_i(u) = 0 & \text{si } i \in I(u) \\ F_i(u) < 0 & \text{si } i \notin I(u). \end{cases}$

On dit que les contraintes sont qualifiées en $u \in K$ s'il existe $\bar{w} \in E$ tq

$\forall i \in I(u)$

soit $F_i'(u)(\bar{w}) < 0$

soit $F_i'(u)(\bar{w}) = 0$ et F_i est affine.

Prop : Soit $u \in K$, $\mathcal{C}(u)$ le cône des directions admissibles en u.

Si les contraintes sont qualifiées en u, on a

$$\mathcal{C}(u) = \{ w \in E \,/\, \forall i \in I(u),\ F_i'(u)(w) \leq 0 \}.$$

$\mathcal{C}(u)$: cône des directions admissibles.

preuve : MQ : $\mathcal{C}(u) \subset \{ w \in E \,/\, \forall i \in I(u),\ F_i'(u)(w) \leq 0 \}$

Soit $w \in \mathcal{C}(u)$, $\exists (u_n)_n$ d'éléments de K tq $u_n \to u$ $(u_n \neq u)$

$\exists (\varepsilon_n)$ $\varepsilon_n > 0 \searrow 0$ tq $\lim_k \frac{u_k - u}{\varepsilon_k} = w$

$F_i(u_k) \leq 0 \quad (u_k \in K)$

$$F_i(u_k) - F_i(u) = \int_0^1 F_i'\big(u + t(u_k - u)\big)(u_k - u)\,dt$$

$$\underbrace{F_i(u_k) - F_i(u)}_{\varepsilon_k} = \int_0^1 F_i'\big(u + t(u_k - u)\big)\,\underbrace{\frac{u_k - u}{\varepsilon_k}}\,dt$$

$\longrightarrow F_i'(u)(w)$ (quand $k \to +\infty$, sous le $\int_0^1$)

si $i \in \underline{I(u)}$ soit $F_i(u) = 0$

$\Rightarrow \quad F_i'(u)(w) \leq 0$

Donc $\mathcal{C}(u) \subset \{\dots\}$

réciproquement : Soit $w \in \{\dots\}$

Pour montrer que $w \in \mathcal{C}(u)$

on va montrer que $\forall \alpha > 0$ (petit)

$w + \alpha \bar{w} \in \mathcal{C}(u)$

avec $\bar{w}$ donné par l'hyp des contraintes qualifiées.

On exploite ainsi le fait que $\mathcal{C}(u)$ est fermé.

On construit $u_k = u + \varepsilon_k (w + \alpha \bar{w})$

1er cas : $i \in I(u)$

Soit a) $F_i'(u)(\bar{w}) < 0$

Soit b) $F_i'(u)(\bar{w}) = 0$ et F_i affine.

a) $F_i(u_k) - F_i(u) = \int_0^1 F_i'(u + t(u_k - u))(u_k - u)\,dt$

$$\frac{1}{\varepsilon_k} F_i(u_k) = \int_0^1 F_i'(\ )\left(\frac{u_k - u}{\varepsilon_k}\right) dt$$

< 0 pour k suffisamment grand

Pour k assez grand $\Rightarrow F_i(u_k) < 0$.

$\hookrightarrow u_k \in K$.

b) $F_i'(u)(\bar{w}) = 0$ et F_i affine

$$F_i(u_k) - F_i(u) = \varepsilon_k F_i'(u)\left(w + \frac{\bar{w}}{\alpha}\right)$$

$$\| \qquad \leq 0$$

$$F_i(u_k) \leq 0 \Longrightarrow u_k \in K.$$

2) $i \notin I(u)$

alors $F_i(u) < 0$ et par continuité de F_i $F_i(u_k) < 0$ pour k assez grand.

$\hookrightarrow u_k \in K$. ($k$ assez gd).

Dans tous les cas $w + \alpha\bar{w}$ est une direction admissible.

□

Thm (Condition nécessaire d'optimalité : (condition de Kuhn-Tucker)

Soit E un Banach réflexif

$K = \{ v \in E \mid F(v) \leq 0 \}$ avec $F : E \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^1$

$J : E \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ t.q.

$\exists u \in K$ t.q. $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$

On suppose de plus que les contraintes sont qualifiées en u

Alors, il existe m réels ≥ 0 $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ appelés multiplicateurs de Lagrange tel que :

$$J'(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i'(u) = 0.$$

Enfin, si $F_i(u) < 0$ alors $\lambda_i = 0$.

preuve : D'après les résultats précédents

$$\mathcal{C}(u) = \{ w \mid \forall i \in I(u), F_i'(u)(w) \leq 0 \}$$

$$w \in \mathcal{C}(u) \Rightarrow -J'(u)(w) \leq 0.$$

On obtient ainsi les hyp du lemme de Farkas

$$-J'(u)(w) = \sum \lambda_i F_i'(u)(w)$$

$$\lambda_i \geq 0.$$

□

Rque : cette caractérisation du min suggère l'introduction de "Lagrangien"

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(u)$$

$$\min_{u \in E} \max_{\lambda_i \in \mathbb{R}^+} \mathcal{L}(u, \lambda)$$

Chap 5 La dualité par les min-max

(Ekeland-Temam Analyse Convexe et pb var. p 156)

Soient V et Z deux espaces de Banach réflexifs, $A \subset V$, $B \subset Z$.

On considère le pb : $\inf_{u \in A} \sup_{p \in B} \mathcal{L}(u,p)$

où $\mathcal{L} : V \times Z \to \mathbb{R}$.

$\mathcal{L}$ est appelé Lagrangien.

I Définition et point selle.

Prop : $\sup_{p \in B} \inf_{u \in A} \mathcal{L}(u,p) \leq \inf_{u \in A} \sup_{p \in B} \mathcal{L}(u,p)$

preuve : exo.

Déf : On dit que $(\bar{u}, \bar{p})$ est un point selle de $\mathcal{L}$ sur $A \times B$ ssi

$\forall u \in A, \forall p \in B,$

$\mathcal{L}(\bar{u}, p) \leq \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p}) \leq \mathcal{L}(u, \bar{p})$.

Prop : La fonction $\mathcal{L}$ définie sur $A \times B$ admet un point selle $(\bar{u}, \bar{\mu})$ sur $A \times B$ ssi

$$\max_{\mu \in B} \inf_{u \in A} \mathcal{L}(u, \mu) = \min_{u \in A} \sup_{\mu \in B} \mathcal{L}(u, \mu)$$

preuve : exo.

Prop : S'il existe $u_0 \in A$, $\mu_0 \in B$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall \mu \in B \quad \mathcal{L}(u_0, \mu) \leq \alpha$$
$$\forall u \in A \quad \mathcal{L}(u, \mu_0) \geq \alpha$$

alors (u_0, μ_0) est point selle et $\mathcal{L}(u_0, \mu_0) = \alpha$.

preuve : exo.

II Caractérisation des points selles.

On va ajouter des hyp de convexité de $\mathcal{L}$ / à la variable de minimisation et concavité de $\mathcal{L}$ / à la variable de maximisation.

(H) $\begin{cases} \mathcal{A} \text{ un ensemble convexe fermé de } V \\ \mathcal{B} \text{ — — — — de } Z \\ \forall \mu \in \mathcal{B},\ u \to \mathcal{L}(u,\mu) \text{ est convexe f.s.c.i.} \\ \forall u \in \mathcal{A},\ \mu \to \mathcal{L}(u,\mu) \text{ est concave f.s.c.s} \end{cases}$

Prop : Sous l'hypothèse (H), l'ensemble $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0$ des points selles est convexe.
De plus, si $\mu \to \mathcal{L}(u,\mu)$ est strict concave alors $\mathcal{B}_0$ contient au plus 1 pt.
si $u \to \mathcal{L}(u,\mu)$ est strict convexe alors $\mathcal{A}_0$ contient au plus 1 pt.

preuve : (u_0,μ_0), (u_1,μ_1) pts selle.

$$\mathcal{L}(u_0,\mu_0) = \alpha$$

$$0 \le t \le 1 \quad \mathcal{L}(u_0, \mu_0 + t(\mu_1 - \mu_0)) \ge \alpha$$

$$\mathcal{L}(u_0 + t(u_1 - u_0), \mu_0) \le \alpha$$

suite exo...

Thm : Sous (H) et $\mathcal{L}$ $\mathcal{C}^1$.
$(\bar u, \bar\mu) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est point selle de $\mathcal{L}$ ssi $\forall u \in \mathcal{A}$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar u, \bar\mu)(u - \bar u) \ge 0$
$\forall \mu \in \mathcal{B}$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(\bar u, \bar\mu)(\mu - \bar\mu) \le 0$

preuve : exo (cf minimisation de f^m convexe)

Thm : Sous (H) et si A et B sont bornées et $\mathcal{L}$ continue, alors $\mathcal{L}$ possède au moins un point selle $(\bar{u}, \bar{\mu})$ sur $A \times B$

$$\mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\mu}) = \min_A \max_B \mathcal{L}(\cdot,\cdot) = \max_B \min_A \mathcal{L}(\cdot,\cdot).$$

preuve : On va démontrer ce résultat dans le cas particulier où $u \to \mathcal{L}(u,\mu)$ est strict convexe.

$u \longrightarrow \mathcal{L}(u,\mu)$ atteint son unique minimum en $e(\mu)$.

$\mu \longrightarrow f(\mu) = \mathcal{L}(e(\mu),\mu)$ est

concave et f s.c.s.

comme enveloppe inférieure de telles fonction (concave et f.s.c.s.).

La fonction f atteint son max en $\bar{\mu}$.

$$f(\bar{\mu}) = \max_B \min_A \mathcal{L}(u,\mu)$$

de plus $f(\bar{\mu}) \le \mathcal{L}(u,\bar{\mu})\ \forall u$

" $\mathcal{L}(e(\bar{\mu}),\bar{\mu})$

- Par concavité / à γ :

$\mathcal{L}(u, (1-\lambda)\bar{\gamma} + \lambda\gamma) \geq (1-\lambda)\,\mathcal{L}(u, \bar{\gamma}) + \lambda\,\mathcal{L}(u,\gamma)$

$\lambda \in (0,1)$ $\forall \gamma \in \mathcal{B}$

Pour $u = e_\lambda = e((1-\lambda)\bar{\gamma} + \lambda\gamma)$

$f(\bar{\gamma}) \geq f((1-\lambda)\bar{\gamma} + \lambda\gamma) = \mathcal{L}(e_\lambda, (1-\lambda)\bar{\gamma} + \lambda\gamma)$

$\geq (1-\lambda)\,\mathcal{L}(e_\lambda, \bar{\gamma}) + \lambda\,\mathcal{L}(e_\lambda, \gamma)$

$\mathcal{L}(e_\lambda, \bar{\gamma}) \geq f(\bar{\gamma})$

$\lambda > 0 \Rightarrow$ ~~λ~~ $f(\bar{\gamma}) \geq$ ~~λ~~ $\mathcal{L}(e_\lambda, \gamma)$

$\forall\, \lambda \in (0,1)$

$$\boxed{f(\bar{\gamma}) \geq \mathcal{L}(e_\lambda, \gamma)} \quad \forall \gamma \in \mathcal{B},\ \forall \lambda \in (0,1)$$

Pour une sous-suite (par compacité faible)

$\lambda_n \to 0$ $\quad e_{\lambda_n} \rightharpoonup \bar{u}$ f. dans V

- Montrons que $\bar{u}$ est indépendant de γ et de la suite λ_n choisie.

$\mathcal{L}(e_\lambda, (1-\lambda)\bar{\gamma} + \lambda\gamma) \leq \mathcal{L}(u, (1-\lambda)\bar{\gamma} + \lambda\gamma)$

On a par concavité de $\gamma \to \mathcal{L}(\cdot, \gamma)$

$(1-\lambda)\,\mathcal{L}(e_\lambda, \bar{\gamma}) + \lambda\,\mathcal{L}(e_\lambda, \gamma) \leq \mathcal{L}(u, (1-\lambda)\bar{\gamma} + \lambda\gamma)$

On prend $\lambda_n \to 0$, on exploite la s.c.i et la s.c.s de $\mathcal{L}$:

$\mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\gamma}) \leq \liminf_{\lambda_n} \mathcal{L}(e_{\lambda_n}, \bar{\gamma}) \leq \limsup_{\lambda_n}$

$\mathcal{L}(u, (1-\lambda_n)\bar{\gamma} + \lambda_n\gamma)$

$\leq \mathcal{L}(u, \bar{\gamma})$

$\forall u \in A$

il réalise donc le min / au premier argument et est unique par stricte convexité de $\mathcal{L}$ / au 1er argument.

- En passant à la limite dans la formule (rouge)

$$f(\bar{r}) \geq \mathcal{L}(\bar{u}, r) \quad \forall r \in B.$$

Finalement,

$$\forall r \in B \quad \mathcal{L}(\bar{u}, r) \leq f(\bar{r}) \leq \mathcal{L}(u, \bar{r}) \quad \forall u \in A.$$

Ainsi, $\mathcal{L}(\bar{u}, \bar{r}) = f(\bar{r})$ et $(\bar{u}, \bar{r})$ est point selle.

□

III Application de la dualité.

On veut pouvoir traiter les exemples suivants :

Ex1 : un problème d'élasticité avec contrainte unilatérale :

le convexe des déplacements admissibles est

$$K = \{ v \in H^1(\Omega), \ v|_{\partial\Omega} \leq 0 \}$$

l'énergie est donnée par :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx$$

Le Lagrangien associé à ce problème est $\mathcal{L}(v, q) = J(v) + \int_{\partial\Omega} v q \, dx$

avec $q \geq 0$ sur $\partial\Omega$.

exemple 2 : Contrainte egalité : Pb de Stokes

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla v)^2 - \int_\Omega f v\,dx$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$K = \{ v \in (H_0^1(\Omega))^d \,/\, \operatorname{div} v = 0 \}$$

$\min_K J$

$$\mathcal{L}(u,p) = J(u) + \int_\Omega p \operatorname{div} u\,dx$$

$$\forall u \in (H_0^1(\Omega))^d$$

II) 1) Contrainte inégalité de dimension finie

$$K = \{ v \in V,\ F(v) \le 0 \} \text{ avec}$$

F une fonction $\mathcal{C}^0$ de $V \to \mathbb{R}^m$.

$\mathcal{C} = (\mathbb{R}^+)^m$ le cône positif.

$$K = \{ v \in V,\ \forall q \in \mathcal{C}\ (q, F(v)) \le 0 \}$$

$$\mathcal{L}(u,p) = J(u) + (p, F(u))$$

On notera $(\bar u, \bar p)$ un point selle de $\mathcal{L}$ sur $V \times \mathcal{C}$.

Thm : (condition suffisante).

Si $(\bar u, \bar p)$ est point selle de $\mathcal{L}$ alors

$$J(\bar u) = \inf_K J(u)$$

et $(\bar p, F(\bar u)) = 0$

preuve : $(\bar u, \bar\pi)$ est point selle de $V \times \mathcal{C}$.

$\forall q \in \mathcal{C}$ $\quad J(\bar u) + (q, F(\bar u)) \le J(\bar u) + (\bar\pi, F(\bar u))$

$\le J(u) + (\bar\pi, F(u))$

$\forall u \in V$

Donc $(\bar\pi, F(\bar u)) \le 0$

. $J(\bar u) \le J(u) + (\bar\pi, F(u))$

$\forall u \in V$

d'après

Donc $(q, F(\bar u)) \le (\bar\pi, F(\bar u))$ (*)

$\forall \lambda > \quad \lambda q \in \mathcal{C}$

$(\lambda q, F(\bar u)) \le (\bar\pi, F(\bar u))$

$(q, F(\bar u)) \le \frac{1}{\lambda} (\bar\pi, F(\bar u)) \xrightarrow{\lambda \to +\infty} 0$

Donc $\bar u \in K$.

Dans (4), on prend $q = 0$ $\quad (\bar\pi, F(\bar u)) \ge 0$

On a $F(\bar u) \le 0$ car $\bar u \in K$ et $\bar\pi \in \mathcal{C}$

$\hookrightarrow (\bar\pi, F(\bar u)) \le 0$.

Donc $\underline{\forall u \in K}$,

$(\bar\pi, F(u)) \le 0$

et $J(\bar u) \le J(u) + (\bar\pi, F(u))$

$\le J(u)$

□

Th (réciproque : C.N).

J et F sont convexes continues et on suppose les contraintes strictt qualifiées (ie $\exists \bar v \in V$ / $F(\bar v) < 0$).

Si $\bar{u}$ est solution de $\inf J$, alors $\exists \bar{p} \in \mathcal{C}$ tq $(\bar{u}, \bar{p})$ soit point selle de $\mathcal{L}$ sur $V \times \mathcal{C}$.

Thm : (CN sous contraintes qualifiées au sens large). (def : voir chap. précédent).

J et F sont convexes $\mathcal{C}^1$ et on suppose les contraintes qualifiées au sens large, V reflexif.

Si $\bar{u}$ est solu de $\inf J$ alors il existe $\bar{p} \in \mathcal{C}$ tq $(\bar{u}, \bar{p})$ est point selle de $\mathcal{L}$ sur $V \times \mathcal{C}$.

preuve : Cf Chap précédent, on peut appliquer le thm de Kuhn-Tucker,
$\exists \bar{p} \in \mathcal{C}$ (multiplicateur de Lagrange)
tel que $J'(\bar{u}) + (\bar{p}, F'(\bar{u})) = 0$ (*)
et $(\bar{p}, F(\bar{u})) = 0$ (**)

On vérifie que $(\bar{u}, \bar{p})$ est point selle.
Le point de la fonction convexe :

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow \mathcal{L}(u) + (\bar{p}, F(u))$$

est caractérisé par (*) en $\bar{u}$.
Donc ce min est atteint en $\bar{u}$:

$$\mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p}) \leq \mathcal{L}(u, \bar{p})$$
$$\forall u \in V.$$

$(\bar{\mu}, F(\bar{u})) \leq 0 = (\bar{\mu}, f(\bar{u}))$ pour $(**)$
car $\bar{u} \in K$ $\forall \mu \in \mathcal{C}$.

Donc $\underbrace{J(\bar{u}) + (\mu, F(\bar{u}))}_{\mathcal{L}(\bar{u}, \mu)} \leq \underbrace{J(\bar{u}) + (\bar{\mu}, F(\bar{u}))}_{\mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\mu})}$

$\forall \mu \in \mathcal{C}$.

☑

III 2) Cas de la dimension infinie.

Def : On definit le cône polaire $\mathcal{C}^*$ d'un cone $\mathcal{C} \subset Y$ (Banach) où 0 est sommet de $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C}^* = \left\{ \mu^* \in Y' \,/\, \forall \mu \in \mathcal{C}, \langle \mu^*, \mu \rangle_{Y',Y} \geq 0 \right\}$$

Prop $\mathcal{C}^*$ est un convexe fermé.

On note $K = \left\{ v \in V, \forall q \in \mathcal{C}^*, \langle q, F(v) \rangle_{Y',Y} \leq 0 \right\}$

avec $F : V \to Y$ et $\mathcal{C}$ un cône saillant.

Def : On dit que F est convexe de V dans Y si

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall q \in \mathcal{C}^*$

$$\langle q, F(\lambda u + (1-\lambda) v) \rangle_{Y',Y}$$
$$\leq \lambda \langle q, F(u) \rangle + (1-\lambda) \langle q, F(v) \rangle$$

Def : On dit que les contraintes sont strictement qualifiées s'il existe $\bar{v} \in V$ tq $\forall q \in \mathcal{E}^* \setminus \{0\}$ $(q, F(\bar{v})) < 0$.

Thm : On suppose J convexe et coercive et F convexe, et on suppose les contraintes strictt qualifiées. Alors si $\bar{u}$ est solu de $\inf_K J$ il existe $\bar{p} \in \mathcal{E}^*$ tq $(\bar{u}, \bar{p})$ est point selle de $\mathcal{L}(u,p) = J(u) + \langle p, F(u) \rangle$ $(u \in V,\ p \in \mathcal{E}^*)$.

preuve : On écrit un corollaire d'un thm précédent (existence d'pt selle sur $A \times B$ borné).

Corollaire : Sous l'hyp (H), on suppose :

$\exists\, p_0 \in B$ tq $\lim_{|u| \to +\infty} \mathcal{L}(u, p_0) = +\infty$

$\exists\, u_0 \in A$ tq $\lim_{|p| \to +\infty} \mathcal{L}(u_0, p) = -\infty$

Alors $\mathcal{L}$ possède au moins un point selle sur $A \times B$ et

$$\min_A \sup_B \mathcal{L}(u,p) = \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{p}) = \max_B \inf_A \mathcal{L}(u,p)$$

$A = V$ convexe fermé.

$B = \mathcal{C}^*$ convexe fermé de Y'

On choisit $\uparrow_0 = 0$ pour montrer la prop de coercivité de $\mathcal{L}$ / à u.

On choisit $u_0 = \bar{v}$ (hyp de contraintes strictt qualifiées) pour montrer que

$$\mathcal{L}(\lambda \mu, \bar{v}) = \lambda \left(\mu, F(\bar{v}) \right) + J(\bar{v})$$

$\lambda \to +\infty \quad \mathcal{L}(\lambda \mu, \bar{v}) \to -\infty$

car $(\mu, F(\bar{v})) < 0$.

□

III 3) Contraintes égalité.

Soient V, H deux espaces de Banach reflexifs

J strictt convexe continue et coercive de V dans $\mathbb{R}$.

B une applicn linéaire de V dans H.

On introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(u, \mu) = J(u) + \langle \mu, Bu - \lambda \rangle$$

$\lambda \in H$. $\mathcal{L} : V \times H' \to \mathbb{R}$. H', H

On considère (S) : $\inf_{u \in V} J(u)$ tq $Bu = \lambda$

Thm : Sous les hypothèses précédentes, le Lagrangien $\mathcal{L}$ possède au moins un point selle $(\bar{u}, \bar{\uparrow})$ dont $\bar{u}$ est unique.
Si J est de plus $\mathcal{C}^1$, $\bar{u}$ est la soln de (S) et si de plus B est surjective $\bar{\uparrow}$ est également unique.

preuve : L'hyp (H) est vérifiée.
L'unicité de $\bar{u}$ découle de la strict convexité de $u \longrightarrow \mathcal{L}(u, p)$
Pour l'existence, on applique le corollaire introduit ci-dessus.

$$\mathcal{L}(u, \uparrow) = J(u) + \underset{H', H}{\langle \uparrow, Bu - \lambda \rangle}.$$

Si $\uparrow_0 = 0$ $\quad \mathcal{L}(u, \uparrow_0) \xrightarrow{\|u\| \to +\infty} +\infty$

$$\mathcal{L}(u_0, \uparrow) \xrightarrow{|\uparrow| \to +\infty} -\infty$$

$\forall \uparrow \in H'$ fixé, on cherche u_0 tq
$\langle \uparrow, Bu_0 - \lambda \rangle < 0$.
$\|u_\uparrow\| \to +\infty$ $\quad \|u\| \to +\infty$.

Si : $\forall u \in V, Bu = \lambda$ alors $\lambda = 0$.
Alors la contrainte est vérifiée $\forall u \in V$.
et on n'a plus de contrainte.
et le Lagrangien est trivial.
Donc $\mathcal{L}$ possède un point selle

On peut alors caractériser un point selle $(\bar u, \bar p)$ si J est $\mathcal{C}^1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\bar u, \bar p)(u - \bar u) \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(\bar u, \bar p)(p - \bar p) \leq 0.$$

$$\mathcal{L}(u,p) = J(u) + \langle p, Bu - \lambda \rangle_{H',H}$$

$$J'(\bar u)(u - \bar u) + \langle \bar p, B(u - \bar u) \rangle \geq 0$$

$\forall p \in H'$ $\quad \langle p - \bar p, B\bar u - \lambda \rangle_{H',H} \leq 0.$

$q = p - \bar p$

$p \in H' \Rightarrow \forall q \in H' \ \langle q, B\bar u - \lambda \rangle \leq 0$

$-q \in H' \ \langle q, B\bar u - \lambda \rangle \leq 0$

Donc $\langle q, B\bar u - \lambda \rangle_{H',H} = 0 \quad \forall q \in H'$

$$\boxed{B\bar u = \lambda}$$

$\bar u$ réalise le min de $u \mapsto \mathcal{L}(u, \bar p)$

$$\begin{cases} J(\bar u) + \langle \bar p, B\bar u - \lambda \rangle \leq J(u) + \langle \bar p, Bu - \lambda \rangle \\ \bar u \text{ vérifie } B\bar u = \lambda \end{cases}$$

On choisit u tq $Bu = \lambda$

et $J(\bar u) \leq J(u)$

$\forall u \in V$ tq $Bu = \lambda$.

$\bar u$ réalise donc (S).

- unicité de $\bar p$ si B surj.

${}^tB$ inj ?

$$J'(\bar u)(u-\bar u) + \underset{V',V}{\langle {}^tB\bar\lambda,\ u-\bar u\rangle} \le 0$$

$$\forall\, u \in V \qquad \left(\begin{matrix} B : V \to H \\ {}^tB : H' \to V' \end{matrix}\right)$$

$$J'(\bar u)(v) + \underset{V',V}{\langle {}^tB\bar\lambda,\ v\rangle} \le 0$$

$$\forall\, v \in V$$

vrai pour $-v \in V$ donc

$$J'(\bar u)(v) + \underset{V',V}{\langle {}^tB\bar\lambda,\ v\rangle} = 0$$

Soit $J'(\bar u) + {}^tB\bar\lambda = 0$

${}^tB\bar\lambda = -J'(\bar u)$ unique par unicité de $\bar u$

Donc $\bar\lambda$ est unique par injectivité de ${}^tB$.

□

application : $V = (H_0^1(\Omega))^d$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f_u u$$

$B = \operatorname{div} : (H_0^1(\Omega))^d \to \dot L^2(\Omega)$

$$\dot L^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) \text{ tq } \int_\Omega p = 0 \right\}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} u\, dx = \int_{\partial\Omega} u.n\, d\gamma$$

$$= 0 \text{ car } u \in (H_0^1(\Omega))^d$$

$${}^tB = -\nabla$$

≡

Chap 6 Algorithmes liés à la dualité.
(Eckland - Temam)

I Méthode d'Uzawa.

$U = \{ u \in \mathbb{R}^m,\ \varphi(u) \leq 0 \}$

avec $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

(S) : $\inf_U J$ $\quad J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

On suppose les contraintes qualifiées pour s'intéresser à la recherche d'un point selle de

$$L(u, \lambda) = J(u) + (\lambda, \varphi(u))$$

$\lambda \in \mathbb{R}^{m+}$

ALGO : On se fixe $\rho > 0$ (réel)

Si u^k, λ^k sont donnés (itéré $= k$ de l'algo)

u^{k+1} minimise $u \longrightarrow L(u, \lambda^k)$

λ_i^{k+1} maximise $\{ 0, \lambda_i^k + \rho \varphi_i(u^{k+1}) \}$

soit $\lambda^{k+1} = \Pi(\lambda^k + \rho \varphi(u^{k+1}))$ }

Thm On suppose de J est α-convexe et que les φ_i sont convexes $\mathcal{C}^1$ et de constante de Lip majorée par M. On suppose les contraintes qualifiées, Alors si $0<\rho<\frac{2\alpha}{M^2}$ l'algo converge : $u^k \xrightarrow{k\to+\infty} u$ solu du pb (P).

preuve : étape 1 : On note Π le projecteur de $\mathbb{R}^m$ dans $(\mathbb{R}^+)^m$

Montrons que $(\bar{u},\bar{\lambda})$ point selle vérifie $\boxed{\bar{\lambda}=\Pi(\bar{\lambda}+\rho\varphi(\bar{u}))}$

$$L(u,\lambda)=\bar{J}(u)+(\lambda,\varphi(u))$$

Caractérisons le pt selle :

$$\partial_\lambda L(\bar{u},\bar{\lambda})(\lambda-\bar{\lambda})\le 0$$

$$(\lambda-\bar{\lambda},\varphi(\bar{u}))\le 0$$

$$(\lambda-\bar{\lambda},\rho\varphi(\bar{u})+\bar{\lambda}-\bar{\lambda})\le 0$$

$$(\bar{\lambda}-(\bar{\lambda}+\rho\varphi(\bar{u})),\bar{\lambda}-\lambda)\le 0 \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}^{+m}$$

C'est la caractérisation de la projection de $\bar{\lambda}+\rho\varphi(\bar{u})$ sur $\mathbb{R}^{+m}$ soit

$$\bar{\lambda}=\Pi(\bar{\lambda}+\rho\varphi(\bar{u})).$$

deuxième étape : Caractériser u^{k+1} qui réalise un min.

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u^{k+1}, \lambda^k) = 0$$

$$J'(u^{k+1}) + \sum_i \lambda_i^k \varphi_i'(u^{k+1}) = 0$$

Les φ_i sont supposés convexes :

$$\varphi_i'(u^{k+1})(\bar{u} - u^{k+1}) \leq \varphi_i(\bar{u}) - \varphi_i(u^{k+1})$$

Soit $J'(u^{k+1})(\bar{u} - u^{k+1}) + \sum \lambda_i^k (\varphi_i(\bar{u}) - \varphi_i(u^{k+1})) \geq 0$

La caractérisation de $\bar{u}$ et celle $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ permet d'écrire les m inégalités :

$$\frac{\partial L}{\partial u}(\bar{u}, \lambda) = 0 \quad J'(\bar{u})(u^{k+1} - \bar{u}) + \sum_i \bar{\lambda}_i (\varphi_i(u^{k+1}) - \varphi_i(\bar{u})) \geq 0$$

Soit, par sommation :

$$\left(J'(u^{k+1}) - J'(\bar{u})\right)(\bar{u} - u^{k+1}) + \sum (\lambda_i^k - \bar{\lambda}_i)(\varphi_i(\bar{u}) - \varphi_i(u^{k+1})) \geq 0$$

Troisième étape : Montrons que $\|\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}\| \searrow$

$$\|\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}\|^2 \leq \|\Pi(\lambda^k + \rho\varphi(u^{k+1})) - \Pi(\bar{\lambda} + \rho\varphi(\bar{u}))\|^2$$

(par déf de suite ; par étape 1)

$$\leq \|\lambda^k + \rho\varphi(u^{k+1}) - (\bar{\lambda} + \rho\varphi(\bar{u}))\|^2$$

car Π est un projecteur

$$\|\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}\|^2 \leq \|\lambda^k - \bar{\lambda}\|^2 + \rho^2 \|\varphi(u^{k+1}) - \varphi(\bar{u})\|^2 + 2\rho(\lambda^k - \bar{\lambda}, \varphi(u^{k+1}) - \varphi(\bar{u}))$$

≥ 0 d'après l'étape 2,

$$(\lambda^k - \bar{\lambda}, \varphi(u^{k+1}) - \varphi(\bar{u})) \leq \left(J'(u^{k+1}) - J'(\bar{u})\right)(\bar{u} - u^{k+1})$$

$$\leq -\alpha \|\bar{u} - u^{k+1}\|^2$$

Ainsi $\|\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}\|^2 \leq \|\lambda^k - \bar{\lambda}\|^2 + \rho^2 M^2 \|u^{k+1} - \bar{u}\|^2$
$-2\alpha\rho \|u^{k+1} - \bar{u}\|^2$

La suite $\|\lambda^k - \bar{\lambda}\|^2$ est $\searrow$ si $2\alpha\rho \geq \rho^2 M^2$

soit $\frac{2\alpha}{M^2} \geq \rho$.

Etape conclusion : $\|\lambda^k - \bar{\lambda}\|$ $\searrow$ minorée par 0

donc convergente. Si $\rho < \frac{2\alpha}{M^2}$ alors

$$\underbrace{(2\alpha\rho - \rho^2 M^2)}_{>0} \|u^{k+1} - \bar{u}\|^2 \leq \underbrace{\|\lambda^k - \bar{\lambda}\|^2 - \|\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}\|^2}_{\downarrow k \to +\infty}.$$

$\overset{0}{\downarrow}$

Donc $u^{k+1} \to \bar{u}$ pour $\|.\|$ (fini)

$\bar{\lambda} = \Pi(\bar{\lambda} + \rho\varphi(\bar{u}))$

$\lambda^{k+1} = \Pi(\lambda^k + \rho\varphi(u^{k+1}))$

Convergence en λ^k ?? ... à suivre.

II Méthode d'Arrow-Hurwicz

C'est une variante de l'algo précédent. Plutôt que de minimiser en u, on fait une descente dans une direction :

$$u^{k+1} = u^k - \rho_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u^k, \lambda^k)$$

$$\lambda^{k+1} = \Pi\left(\lambda^k + \rho_2 \varphi(u^{k+1})\right)$$

preuve de convergence : mix de la preuve précédente avec cgce de la méthode de descente .... ex D.
(Chap 1)

III Le Lagrangien augmenté pour Stokes.

On reprend les notations du chap précédent : V, H : 2 esp. de Banach sep et réflexifs.

J : strict convexe coercive continue de $V \to \mathbb{R}$.

B : linéaire continue de $V \to H$ surjectif.

$$G(u) = J(u) + \frac{r}{2}\|Bu - \lambda\|_H^2$$

$r > 0$ fixé.

$\lambda \in H$ fixe.

$$\mathcal{L}_r(u, \mu) = G(u) + \langle \mu, Bu - \lambda \rangle_{H', H}$$

$\mathcal{L}_r$ possède un unique point selle (cf chap précédent) qui est le $\hat{m}$ pour tout $r \geq 0$.
$(\bar{u}, \bar{\mu})$ point selle réalise $J(\bar{u}) = \min_{\substack{u \in V \\ Bu = \lambda}} J(u)$

ALGO : Si (u^k, λ^k) sont donnés :

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho(Bu^k - \lambda) \quad (\rho > 0 \text{ fixé})$$

u^{k+1} réalise le min de :

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & \mathcal{L}_r(u, \lambda^{k+1}) \end{array}$$

On vérifie que cet algo définit une suite $(\lambda^k)_k$ de H et $(u^k)_k$ de V.

Thm : Si on suppose de plus que J est α-convexe et si $0 < \rho < 2r$, alors l'ALGO proposé, dit du Lagrangien augmenté, est convergent.

preuve : u^{k+1} vérifie :

$$J'(u^{k+1}) + r\,{}^tB(Bu^{k+1} - \lambda) + {}^tB\lambda^{k+1} = 0$$

De plus $J'(\bar{u}) + \underbrace{r\,{}^tB(B\bar{u} - \lambda)}_{\|} + {}^tB\bar{\lambda} = 0$

- Etudions $\|q^k\|^2$ avec $q^k = \lambda^k - \bar{\lambda}$.

$$v^k = u^k - \bar{u}$$

on suppose $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega Au \cdot u\,dx - \int_\Omega fu\,dx$

On a alors $Au^{k+1} - f + r\,\ldots = 0$

$$A\bar{u} - f + r\,\ldots = 0$$

Soit $Av^{k+1} + r\,{}^tBBv^{k+1} + {}^tBq^{k+1} = 0$

$$\|q^{k+1}\|^2 = \|q^k + \rho B v^k\|^2$$

$$= \|q^k\|^2 + \rho^2 \|B v^k\|^2 + 2\rho (q^k, B v^k)$$

$$(q^k, B v^k) = ({}^t B q^k, v^k)$$

$$= -(A v^k + r\, {}^t B B v^k, v^k)$$

$$\leq -\alpha \|v^k\|^2 - r \|B v^k\|_H^2 \quad (*)$$

$$\text{Soit } \|q^{k+1}\|^2 \leq \|q^k\|_V^2 + (\rho^2 - 2\rho r) \|B v^k\|^2$$

Donc $\|q^k\|$ est $\searrow$ si $\rho^2 - 2\rho r \leq 0$.

donc $\|q^k\|$ cgte et $\|B v^k\|^2 \leq \dfrac{1}{\rho^2 - 2\rho r} \underbrace{(\|q^k\|^2 - \|q^{k+1}\|^2)}_{\downarrow 0}$

si $\rho < 2r$

Ainsi $B v^k \to 0$ fort dans H.

De plus, en reprenant $(*)$, on a

$$\|q^{k+1}\|^2 \leq \|q^k\| + (\rho^2 - 2\rho r) \|B v^k\|^2 - \alpha \|v^k\|_V^2$$

Soit $\alpha \|v^k\|_V^2 \leq (\|q^k\|^2 - \|q^{k+1}\|^2)$

$\downarrow$

Donc $v^k \to 0$ fort de V.

Il reste à établir la convergence de q^k :

$${}^t B q^k = -(A + r\, {}^t B B) v^k$$

$$\|q^k\|_H \leq C \|{}^t B q^k\|_V,$$

$$\leq C \underbrace{\|A v^k\|_V}_{\leq \|v^k\|_V} + a \underbrace{\|{}^t B B v^k\|_V}_{\leq \|B v^k\|_V}$$

Donc $q^k \to 0$ dans H.

□

Pour $B = div$, on a ${}^tB = \nabla$

et $Pu^k = \nabla\varphi$.

Variante d'algorithme : ($\lambda = 0$)

$$\mathcal{L}_r(u,p) = J(u) + \frac{r}{2}\|Bu\|^2 + \underbrace{\langle p, Bu\rangle}_{\langle {}^tBp,\, u\rangle}$$

$$gp^{k+1} = gp^k + \rho P u^k$$

où P est le projecteur sur $(\underbrace{\ker B}_{=\overline{Im\,B}})^{\perp}$.

u^{k+1} minimise $u \longrightarrow \mathcal{L}_r(u, p^{k+1})$

avec $gp^{k+1} = {}^tBp^{k+1}$