

Chap?

La méthode Élément  
Fini.

I Introduction.

exemple de construction E.F.  $P_1$   
sur le b de Dirichlet 1D.

$$(S) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La formulation variationnelle  
de (S) s'écrit

$$(V) \begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(0,1) \text{ tq} \\ \forall v \in H_0^1(0,1), \\ a(u, v) = l(v) \end{cases}$$

$$\text{avec } a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx$$

$$l(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

On va construire une approxi-  
du problème (V) en approchant  
l'espace des fonctions tests,

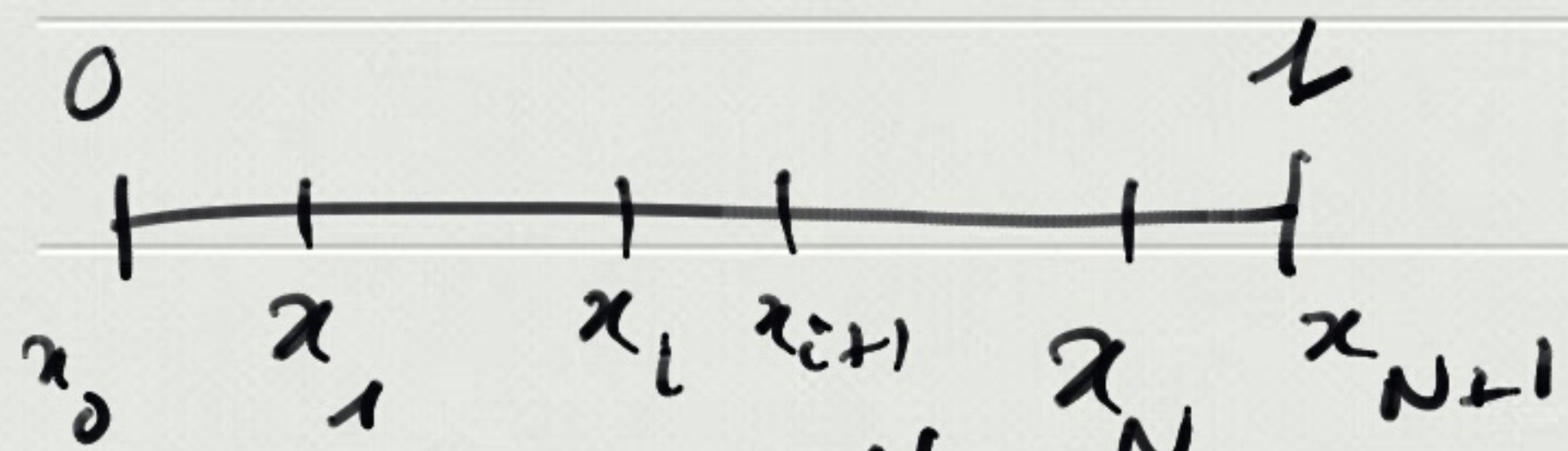
$$(V_h) \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tq} \\ \forall v \in V_h \\ a(u_h, v) = l(v) \end{cases}$$

avec  $\dim V_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$

Pour une méthode E.F., le choix de  $V_h$  est obtenu après discrétisation (ou maillage du domaine sur lequel est posé l'EDP; ici  $]0,1[$ ).

On note  $x_i = ih$   $0 \leq i \leq N+1$

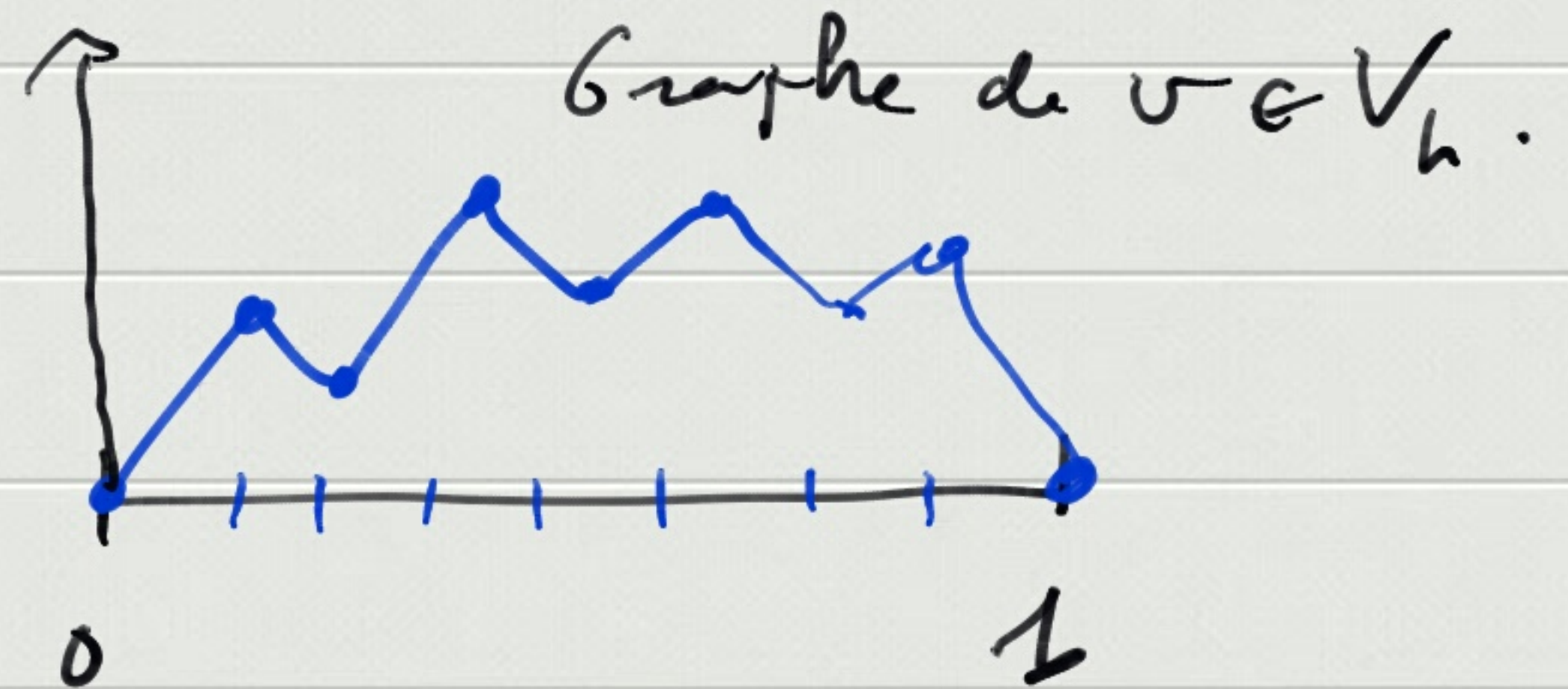
$$x_{N+1} = 1; \text{ soit } h = \frac{1}{N+1}.$$



$$]0,1[ = \bigcup_{i=0}^N [x_i, x_{i+1}]$$

$$v \in V_h \Leftrightarrow \begin{cases} v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}_1[x] \\ v \in \mathcal{C}^0(0,1) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

Ici  $V_h$  est un espace de fonctions affines par morceaux, sous-ensemble de  $H_0^1(0,1)$ .



On cherche à expliciter la construction de  $u_h$  pour la calculer sur machine.

Le problème  $(V_h)$  est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tq } \forall \phi_i, 1 \leq i \leq N \\ a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i) \end{cases}$$

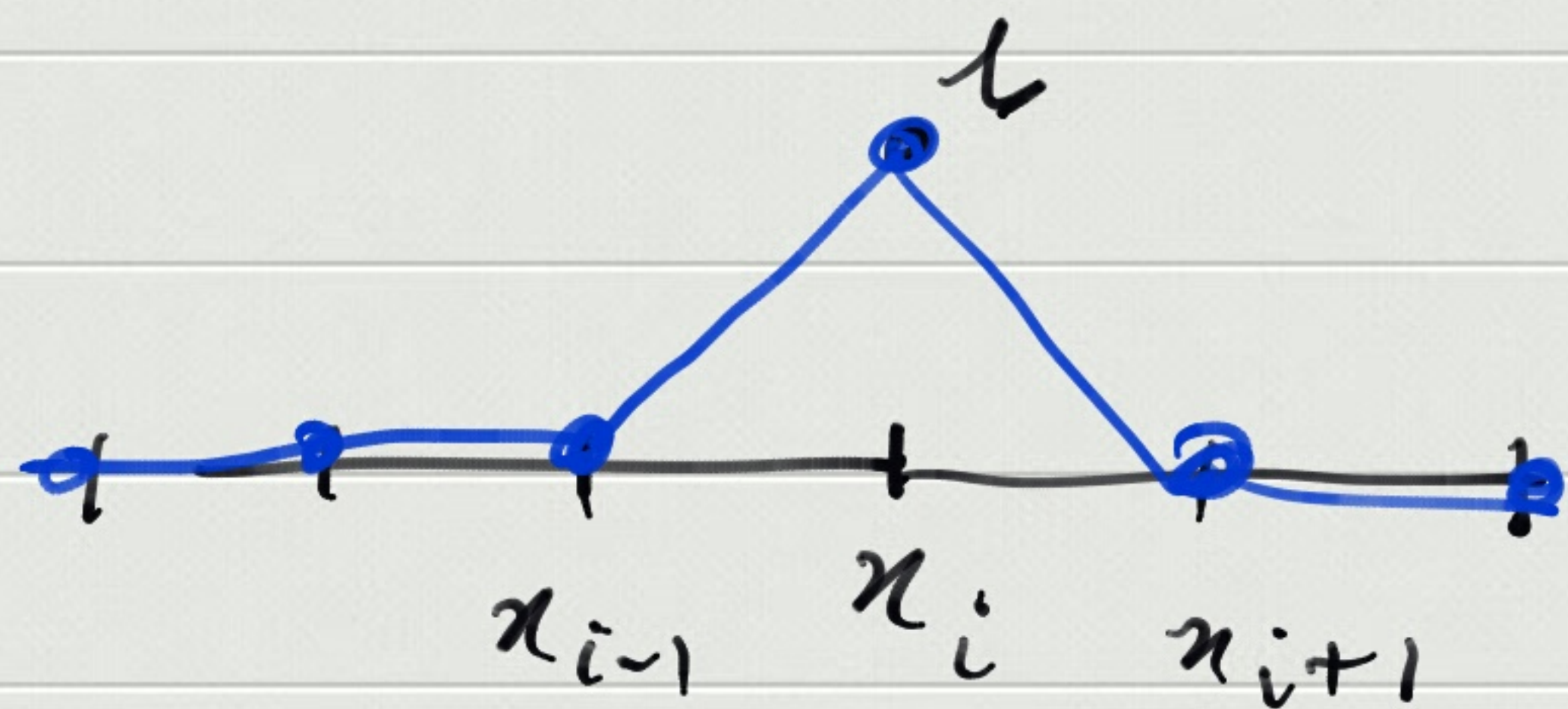
où  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$  est une base de  $V_h$ .

On construit comme base  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ ,

$$\text{tg} \quad \phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N$$

$$\phi_i(x_0) = \phi_i(x_{N+1}) = 0$$

Avec  $\phi_i$  continue et affine par morceaux.



$$(\mathcal{V}_h) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (\alpha_j)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N \text{ tg} \\ a(\sum \alpha_j \phi_j, \phi_i) = l(\phi_i) \\ 1 \leq i \leq N \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } (\alpha_j)_{1 \leq j \leq N} \\ \sum a(\phi_j, \phi_i) \alpha_j = l(\phi_i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Trouver } W \in \mathbb{R}^N \text{ tg}$$

$$M W = F$$

$$M = \begin{matrix} & j \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} a(\phi_j, \phi_1) \\ \vdots \\ a(\phi_j, \phi_i) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad F = \begin{matrix} i \rightarrow & \begin{pmatrix} l(\phi_1) \\ \vdots \\ l(\phi_i) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad W = \begin{matrix} i \rightarrow & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Comme le support de  $\phi_j$  et  $\phi_i$  diffère si  $|j-i| \geq 2$ , la matrice

$M$  est tridiagonale,

le calcul donne :

$$M = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & & & \\ & & & \\ 0 & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

Le second membre  $F$  est plus compliqué à calculer et dépend de  $f$  sur  $]x_i, x_{i+1}[$ .

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \phi_i dx$$

## II Définition générale

On se donne :

i) Un compact  $K \subset \mathbb{R}^d$  connexe et d'intérieur non vide.

ii) un ensemble fini  $\Sigma_K$  de degré de liberté :

$$l_m(x) \quad 1 \leq m \leq M$$

des formes linéaires sur  $C^\infty(K)$

iii) Un espace vectoriel  $P_K$  de dimension finie de fonctions définies sur  $K$  à valeurs réelles.

(exple:  $P_K = P_1|_K$ )

Def On dit que l'ensemble  $\Sigma_K$  est  $P_K$ -unisolvant ssi  
 étant donné  $M$  réels  $(\alpha_m)_{1 \leq m \leq M}$   
 $\exists ! p \in P_K$  tq  $l_m(p) = \alpha_m$   
 $1 \leq m \leq M$ .

Df Pour  $(K, \Sigma_K, P_K)$  donné,  
 si  $\Sigma_K$  est  $P_K$ -unisolvant  
 on dit que le triplet  $(K, \Sigma_K, P_K)$   
 est un élément fini.

Def On appelle fonctions de  
 base de  $P_K$ , les  $M$  fonctions  
 de  $P_K$   $(\varphi_m)_{1 \leq m \leq M}$  tq  
 $l_j(\varphi_i) = \delta_{ij}$   $1 \leq i \leq M$   
 $1 \leq j \leq M$ .

Prop Si la condition d'unisolvance  
 est réalisée alors

Card  $\Sigma_K = M = \dim P_K$ .  
 Montrer l'unisolvance, c'est montrer  
 que l'appli:

$$\begin{aligned}
 P_K &\rightarrow \sum_{i=1}^M \mathbb{R} \varphi_i \\
 p &\rightarrow \{l_m(p)\}_{1 \leq m \leq M}
 \end{aligned}$$

est bijective.

et c'est équivalent à montrer que

$$\begin{cases} \text{l'application est injective} \\ \text{et } \text{Card } \Sigma_K = \dim P_K \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{l'application est surjective.} \\ \text{Card } \Sigma_K = \dim P_K \end{cases}$$

Def / On dit que 2 E.F.  $(\hat{K}, \Sigma_{\hat{K}}, P_{\hat{K}})$

et  $(K, \Sigma_K, P_K)$  sont équivalents

si il existe une bijection  $F_K: \hat{K} \rightarrow K$

$$P_K = \{ \tau: K \rightarrow \mathbb{R} \mid \tau \circ F_K \in P_{\hat{K}} \}$$

$$\Sigma_K = F_K(\Sigma_{\hat{K}}).$$

exple:  $\hat{K} = [0, 1]$   $\Sigma_{\hat{K}} = \{ \tau \rightarrow \tau(0), \tau \rightarrow \tau(1) \}$

$$P_{\hat{K}} = \mathbb{P}_1.$$

$$K = [x_i, x_{i+1}] \quad P_K = \mathbb{P}_1$$

$$\Sigma_K = \{ \tau \rightarrow \tau(x_i), \tau \rightarrow \tau(x_{i+1}) \}$$

On choisit

$$F_K: \hat{K} \rightarrow K$$

$$x \mapsto x_i + x(x_{i+1} - x_i)$$

Exple 2 :



Def / les E.F. sont afinement équivalents si  $F_K$  est affine.

Exemple  $([0, 1], \{t \rightarrow t^0, t \rightarrow t^1\}, P_1)$

est un EF, c'est celui  $\Sigma_{1 \leq k}^{\text{introduit en I}}$ .

2) Construction de  $V_h$ .

On suppose une formule variationnelle donnée. On note  $V$  l'espace sur lequel s'appuie la FV:  $\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$ .

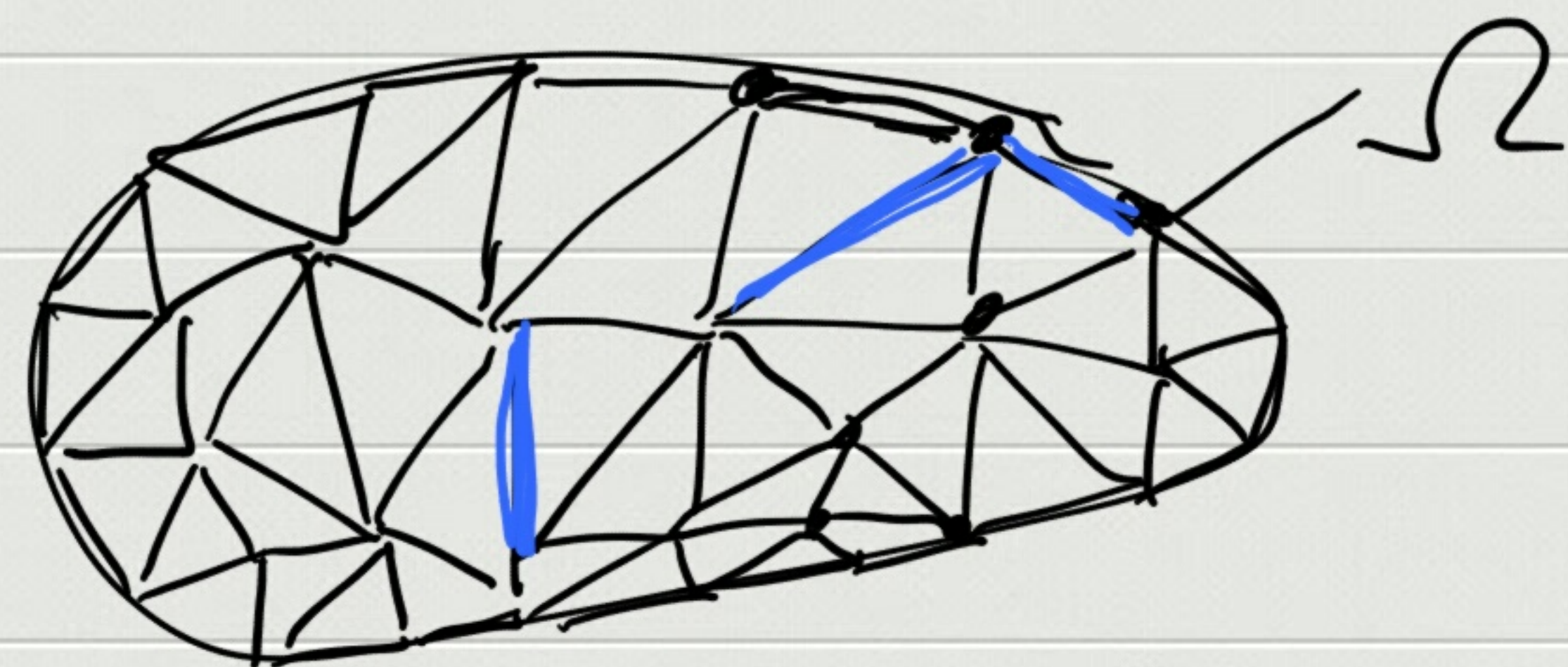
On appelle  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  l'ouvert sur lequel  $v \in V$  est défini.

Exple  $V = H_0^1(\Omega)$ .

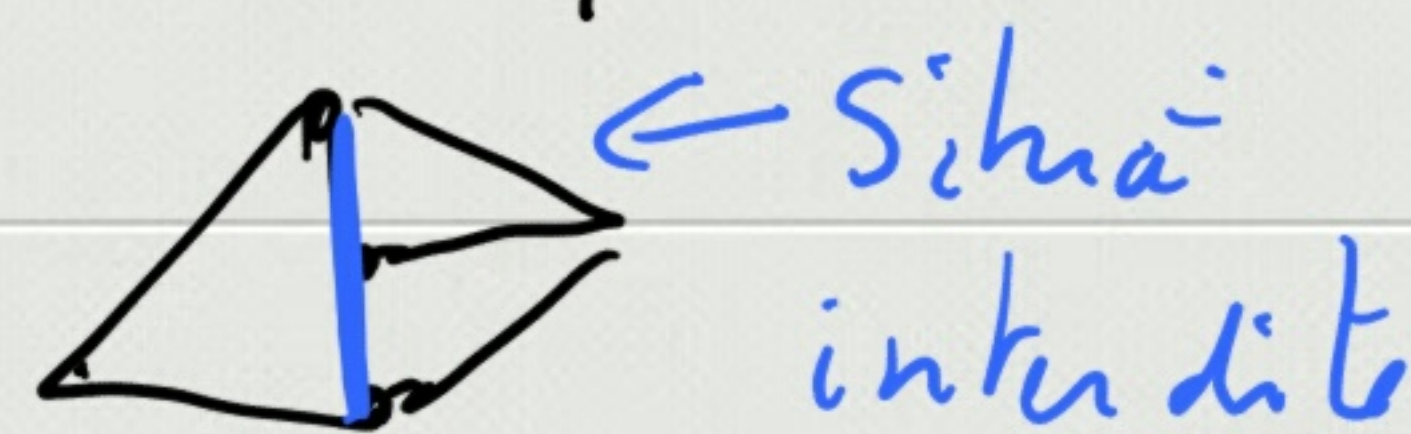
On va construire  $\Omega_h$  comme une triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ .

$\Omega_h = \Omega$  si  $\Omega$  est polygonal

$\Omega_h \neq \Omega$  sinon:



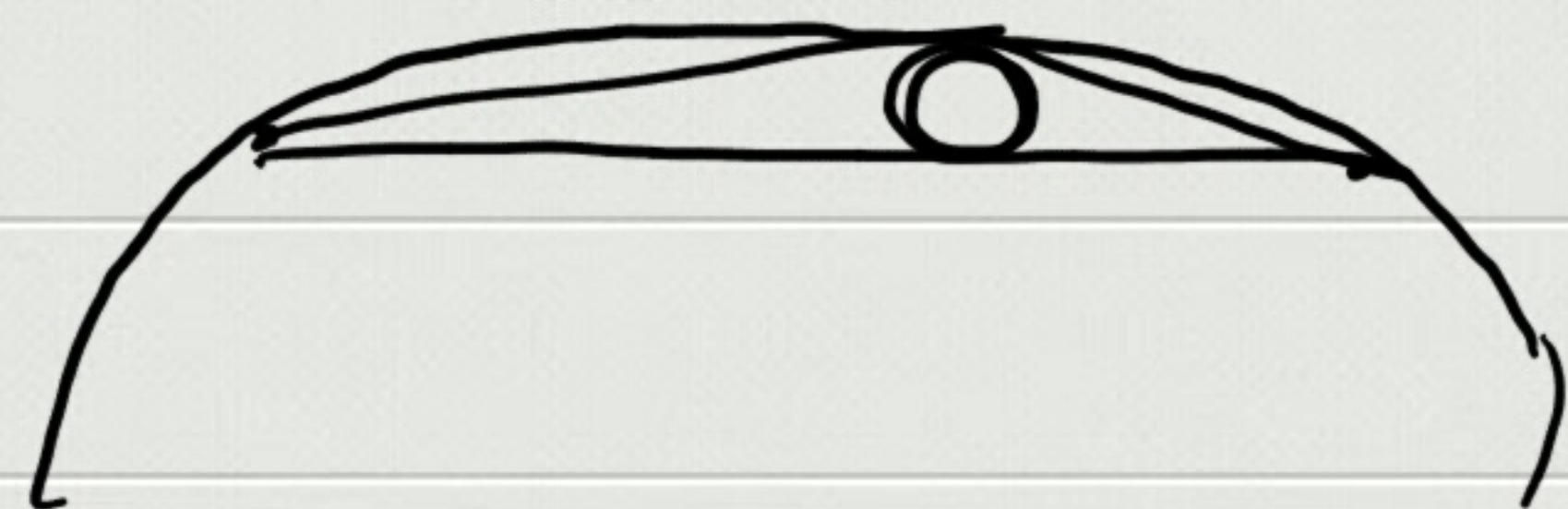
On va se limiter au triangulation où: un côté d'un élément est le côté d'au plus 2 éléments.



La situat<sup>o</sup>n évoquée correspond à un maillage non conforme qu'on ne considèrera pas ici.

• On s'impose une autre contrainte : on note  $\rho'_K$  le diamètre de la plus grande boule inscrite dans  $K$  et  $\rho_K$  le diamètre de la plus petite boule contenant  $K$ , il faut :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h \quad \frac{\rho_K}{\rho'_K} \leq C \text{ fixé.}$$



Une triangulat<sup>o</sup>n  $\mathcal{T}_h$ ,  $\Omega_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$

qui respecte les 2 prop. évoquées sera dite admissible.

## II Interpolation de Lagrange.

On va s'intéresser à des degrés de liberté qui ne font intervenir que des évaluat<sup>o</sup>ns de polynômes.

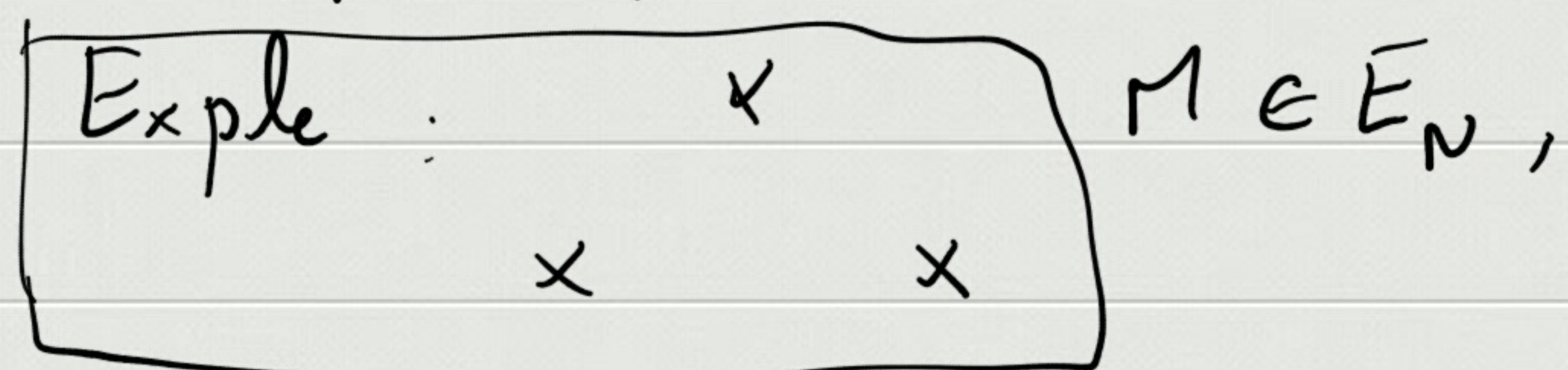
Def On dit qu'un EF est de Lagrange si  $\forall l_m \in \Sigma_K \quad (1 \leq m \leq N)$   
 $l_m(p) = p(a_m)$



où les  $a_m$  sont des points de  $K$ .

### 1) Coordonnées barycentriques

On se donne  $(N+1)$  points non tous situés dans un même hyperplan d'un espace  $E_N$  de dimension  $N$ .



on va chercher les coordonnées barycentriques  $(\lambda_n)$  de  $M$  en fonctions des  $(N+1)$  points  $(a_n)$ .

$$\sum_{n=0}^N \lambda_n(M) = 1$$
$$\sum_{n=0}^N \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

On travaillera avec  $M$  dans

l'enveloppe convexe des  $\{a_n\}_{0 \leq n \leq N}$

ie  $\{M \mid \lambda_n \geq 0, 0 \leq n \leq N\}$ .

prop:  $\lambda_n(a_{n'}) = \delta_{nn'}$ .

Exple: en dimension 1:  $x$   $x$   
 $a_0$   $a_1$

$$K = [a_0, a_1]$$

$$M \in K \quad \vec{OM} = \lambda_0 \vec{OA_0} + \lambda_1 \vec{OA_1}$$

Si  $a_0 = (0,0)$ ,  $a_1 = (1,0)$ , et si on note  $x$  l'abscisse de  $M$ :

$$\lambda_1 = x \quad \lambda_0 = 1 - x.$$

Exple en dimension 2:

Soit  $\Pi(x, y)$

$$\lambda_0(M) \overrightarrow{Oa_0} + \lambda_1 \overrightarrow{Oa_1} + \lambda_2 \overrightarrow{Oa_2} = \overrightarrow{O\Pi}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a  $\overrightarrow{Oa_0} = \vec{0}$ .

$$\lambda_1 = x \quad \lambda_2 = y$$

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 1 - x - y.$$

2) Revue des E.F de Lagrange en dimension 1 et 2

• E.F.  $\mathbb{P}_0$ .

dim 1 : triplet de référence

$$\left\{ [0, 1], \ell_1(\uparrow) = \uparrow(1/2), \mathbb{P}_0 \right\}$$

dim 2 : triplet de référence

$$\left\{ K = (\widehat{(0,0), (1,0), (0,1)}), \ell_1(\uparrow) = \uparrow\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right), \mathbb{P}_0 \right\}$$

↑  
Coord. baryc.

exercice: vérifions que ce sont des E.F.

C.N. : Card  $\sum_K = \dim P_K$

ici  $1 = 1$ .

Vérifions que si  $\ell_1(p) = 0$  alors  $p = 0$ .  
TRIVIAL!

« E.F. :  $\mathbb{P}_1$ .

en dimension 1:  $\mathbb{P}_K = \mathbb{P}_1 = S_p\{1, x\}$

$K = [a_0, a_1]$   $\Sigma_K = \{p \rightarrow p(a_0); p \rightarrow p(a_1)\}$

$\{K, \Sigma_K, \mathbb{P}_K\}$  est-il un E.F.?

Card  $\Sigma_K = \dim \mathbb{P}_K = 2$ .

Si  $p(a_0) = p(a_1) = 0$  alors  $p \in \mathbb{P}_1$

vérifie  $p \equiv 0$ .

$p(x) = (x - a_0)(x - a_1)R(x)$

avec  $R$  un polynôme.

Or  $d^0(p) \leq 1$  donc  $R = 0$ .

Donc  $p \equiv 0$ .  $\square$

en dimension 2:  $K = \{a_0, a_1, a_2\}$   
E.F.  $\mathbb{P}_1$  sommet.  
 $a_0, a_1, a_2$  non alignés

$\Sigma_K = \{p \rightarrow p(a_0), p \rightarrow p(a_1), p \rightarrow p(a_2)\}$

$\mathbb{P}_K = \mathbb{P}_1 = S_p = \{1, x, y\}$ .

Card  $\Sigma_K = \dim \mathbb{P}_K = 3$ .

Si  $p(a_i) = 0$   $i = 0, 1, 2$ .

a-t-on  $p \equiv 0$ ?

Si  $p \in \mathbb{P}_2$   $p(a_i) = b_i$   $i = 0, 1, 2$   
 $p = \sum_{i=0}^2 b_i \lambda_i$ .

La propriété d'injectivité pour la  $P_K$ -universalité est immédiate par les coord. barycentriques.

Autre preuve: le polynôme restreint à  $[a_0, a_1]$  est nul. Si  $x$  est la composante selon  $[a_0, a_1]$

$$\uparrow(x, y) = x q(x, y)$$

Donc  $q(x, y) = \text{cte}$  (sinon  $\uparrow \notin P_1$ ).

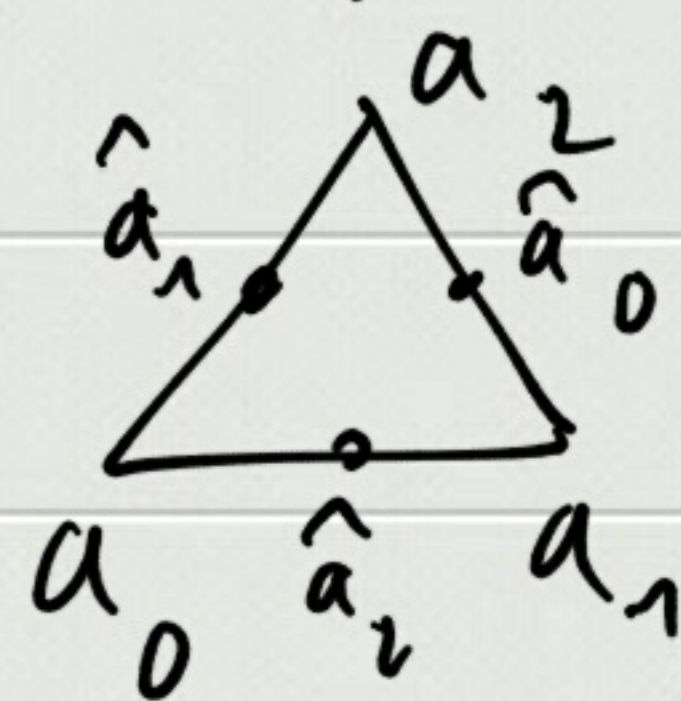
On a choisi un système de coordonnées tel que  $a_2$  a une composante en  $x$ :  $x_2 \neq 0$ .

$$\uparrow(a_2) = x_2 \text{cte} = 0.$$

$$\text{avec } x_2 \neq 0 \Rightarrow \text{cte} = 0.$$

Preuve géométrique: Par 3 points de  $\mathbb{R}^3$  passe un unique plan.

. E.F.  $IP_1$  - milieu.



$$K = \widehat{a_0, a_1, a_2}$$

$$\Sigma_K = \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \rightarrow \uparrow(\hat{a}_0), \uparrow \rightarrow \uparrow(\hat{a}_1) \\ \uparrow \rightarrow \uparrow(\hat{a}_2) \end{array} \right\}$$

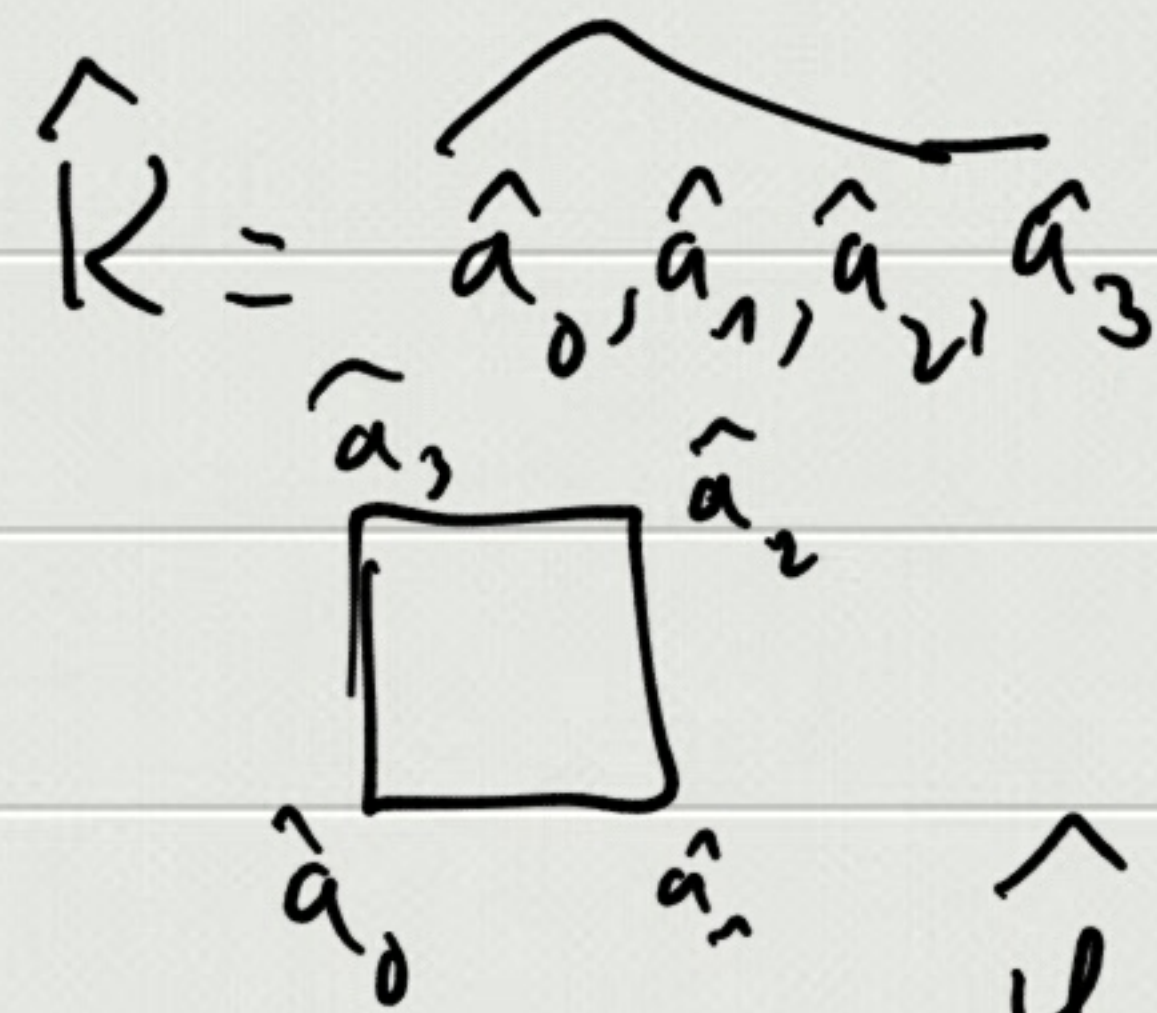
$\{K, \Sigma_K, P_1\}$  est encore un E.F.  
 Cet E.F. sera utile pour construire  
 des fonctions de  $V_h$  qui sont  
 volontairement discontinues.

C'est intéressant lorsque la solu-  
 tion du pb à résoudre présente des  
 discontinuités.

E.F.  $Q_1$  - sommet.

$Q_1$  est un espace de polynômes  
 de degré au plus 1 dans chaque  
 direction fixée de une base de l'espace  
 $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  ....

dim 2 :  $Q_1 = \text{Sp} \{1, x, y, xy\}$ .



$$\hat{a}_0 = (0, 0)$$

$$\hat{a}_1 = (1, 0)$$

$$\hat{a}_2 = (1, 1) \quad \hat{a}_3 = (0, 1)$$

$$\hat{\psi}_0 = (1-y)(1-x) \quad \hat{\psi}_1 = (1-y)x$$

$$\hat{\psi}_2 = xy$$

$$\hat{\psi}_3 = y(1-x)$$

$\Sigma_K$ .

On considère :  $\{ \hat{K}, \{ \uparrow \rightarrow \uparrow(\hat{a}_i), i=0,1,2,3 \}, \mathcal{Q}_1 \}$

$\dim \mathcal{Q}_1 = \text{Card } \Sigma_K$

Vérifions que si  $\uparrow(\hat{a}_i) = 0 \quad i=0,1,2,3$

alors  $\uparrow \equiv 0$ .

On a  $\uparrow|_{[a_0 a_1]} \equiv 0 \quad \uparrow|_{[a_i a_{i+1}]} \equiv 0$   
 $i = 0,1,2,3$   
avec  $a_4 = a_0$ .

car  $\uparrow|_{[a_i a_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1(x)$  ou  $\mathbb{P}_1(y)$

Donc  $\uparrow = xy(1-x)(1-y)R(x)$

avec  $R$  nécessairement nul

pour que  $\uparrow \in \mathcal{Q}_1$ .

Donc  $\mathcal{Q}_1$ -somme est un E.F.

IP2 :

dim = 1 :  $K = [0,1] \quad P_K = P_2 = \{1, x, x^2\}$

E.F. =  $\{ [0,1], \uparrow \rightarrow \uparrow(0), \mathbb{P}_2 \}$   
 $\uparrow \rightarrow \uparrow(1)$   
 $\uparrow \rightarrow \uparrow(1/2)$

Exo: Coord barycentrique.

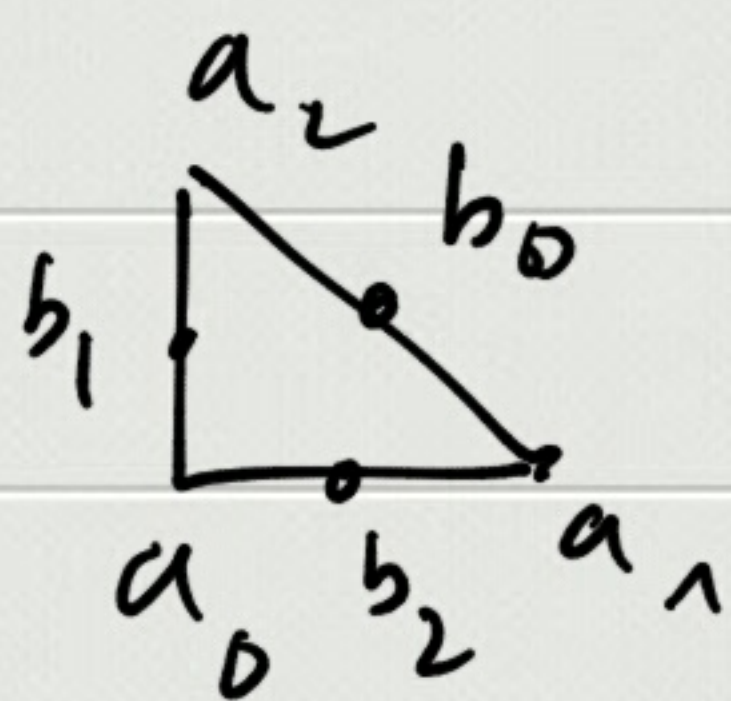
Montrer que  $\varphi_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq 2$ )

$$= \{ \lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1(2\lambda_2-1), -\lambda_2(2\lambda_1-1) \}$$

↓  
attaché  
au pt milieu

et vérifier que l'élément proposé est bien un E.F.

dim = 2:



$$K_2 = \widehat{a_0, a_1, a_2}$$

$$P_K = \mathbb{P}_2 = \{ 1, x, y, xy, x^2, y^2 \}$$

$$\Sigma_K = \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \rightarrow \uparrow(a_i) \quad i=0,1,2; \\ \uparrow \rightarrow \uparrow(b_i) \quad i=0,1,2 \end{array} \right\}$$

Card  $\Sigma_K = \dim P_K$ .

Exo: f<sup>n</sup> de base  $\varphi_i = -\lambda_i(2\lambda_i-1)$  ( $1 \leq i \leq 3$ )

$$1 \leq i < j \leq 3 \quad \varphi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad 3$$

Vérifier que c'est un E.F.

3)  $V_h$  associée au E.F. de Lagrange.

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \mid v_h|_{T_i} \in P_{T_i} \forall T_i \in \mathcal{T}_h \right\}$$

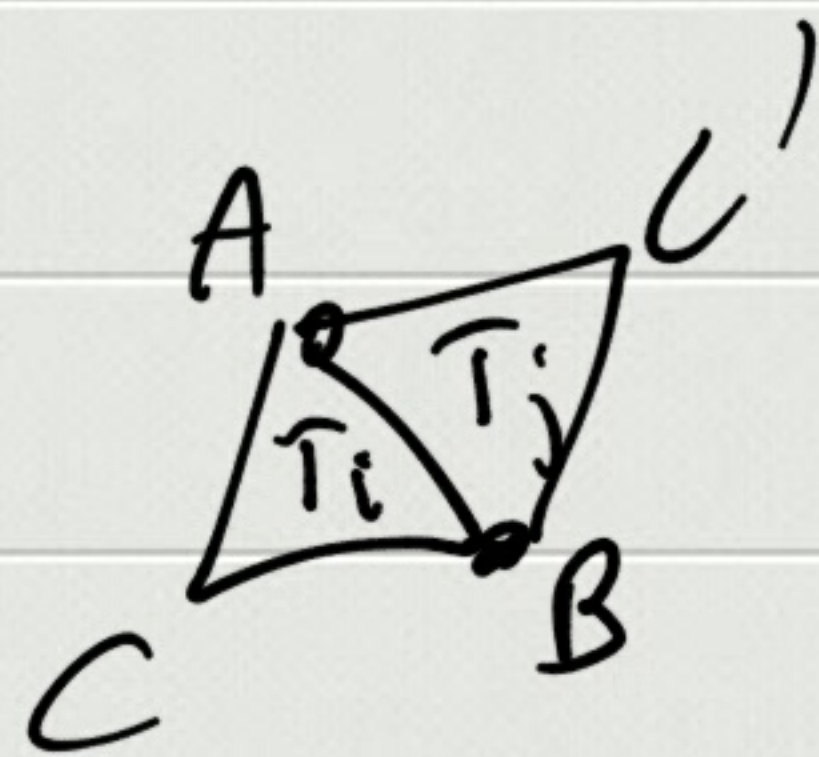
$$\text{avec } \Omega = \bigcup_{T_i \in \mathcal{T}_h} T_i$$

Si on travaille avec les E.F.

mentionnés au 2) sauf le  $P_1$ -milieu

et  $P_0$ , on a toujours

$$v_h \in \mathcal{C}^0.$$



$P_1$ -sommet en dimension 2.

$[AB]$  bord de  $T_i$  et  $T_j$ .

$v_h|_{T_i} \in P_1$  défini par  
 $v(A)$  et  $v(B)$  et  $v(C)$ .

$v_h|_{T_j} \in P_1$  défini par  
 $v(A)$ ,  $v(B)$ ,  $v(C')$

On constate que  $v_h$  est  
continue sur  $[AB]$ .



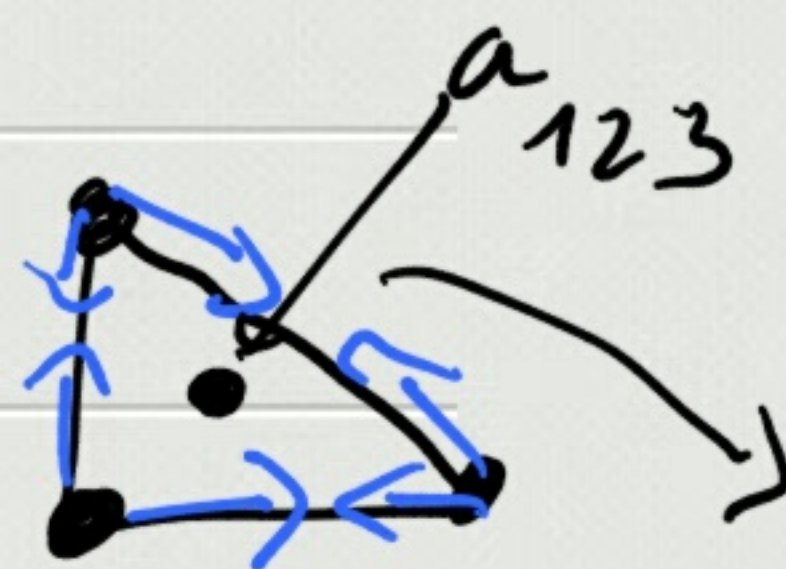
Ainsi,  $V_h \subset C^0 \subset H^1(\Omega)$  pour les EF considérés (sauf  $IP_1$ -milieu,  $IP_0$ ).

4) Interpolat<sup>e</sup> d'Hermite.

Cette terminologie signifie qu'on considère des d.d.l. qui font intervenir des évalua<sup>e</sup> de polynôme ainsi que des évalua<sup>e</sup> de dérivées de polynôme.

E.F.  $IP_3$  de Hermite.

dim = 1 ;  $K = [0, 1]$



$$\Sigma_K = \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \rightarrow \uparrow(0), \uparrow \rightarrow \uparrow(1), \uparrow \rightarrow \uparrow'(0), \\ \uparrow \rightarrow \uparrow'(1) \end{array} \right\}$$

$$P_K = IP_3.$$

$P_K$ -unisolvance:  $\dim P_K = 4 = \text{Card } \Sigma_K$ .

$$\text{Si } \uparrow(0) = \uparrow'(0) = 0, \uparrow(1) = \uparrow'(1) = 0$$

$$\text{alors } \uparrow(x) = x^2(1-x)^2 r(x)$$

$$\text{Donc } r(x) = 0, \text{ sinon } \uparrow \notin IP_3.$$

Rq:  $V_h \subset \mathcal{C}^1$

$\dim = 2$   $K = \overbrace{(0,0), (0,1), (1,0)}^{a_0, a_1, a_2}$

$$\Sigma_K = \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \rightarrow \uparrow(a_i), a_i \leq 2; \uparrow \rightarrow \nabla \uparrow(a_i) \cdot (a_j - a_i) \\ a_i \leq 2 \quad a_j \text{ adj. } \bar{a} \quad a_i \\ \uparrow \rightarrow \uparrow'(a_{123}) \end{array} \right.$$

$P_K$ -unisolvance:  $\dim P_K = 10$

$$P_K = \text{Vect} \left\{ 1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, y^2x, x^3, y^3 \right\}$$

Card  $\Sigma_K = 3 + 6 + 1 = 10$

On suppose les ddl = 0.



$j \neq i \uparrow |a_i a_j \in P_3$  (bord)

$\hookrightarrow \uparrow |a_i a_j \equiv 0$ .

$\hookrightarrow r = \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0 r$

Donc  $r = cte$ , sinon  $r \notin P_3$ .

en  $a_{123}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$

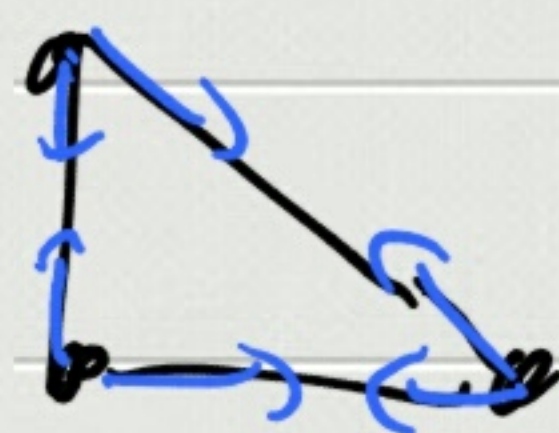
$\uparrow = \left(\frac{1}{3}\right)^3 cte = 0$

$\hookrightarrow cte = 0$ .

E.F. de Zienkiewicz:

$\forall r \in P_2$ , on définit

$$\psi(r) = \delta_r(a_{123}) - 2 \sum_i r(a_i) + \sum \nabla_r(a_i)(a_i - a_{123})$$

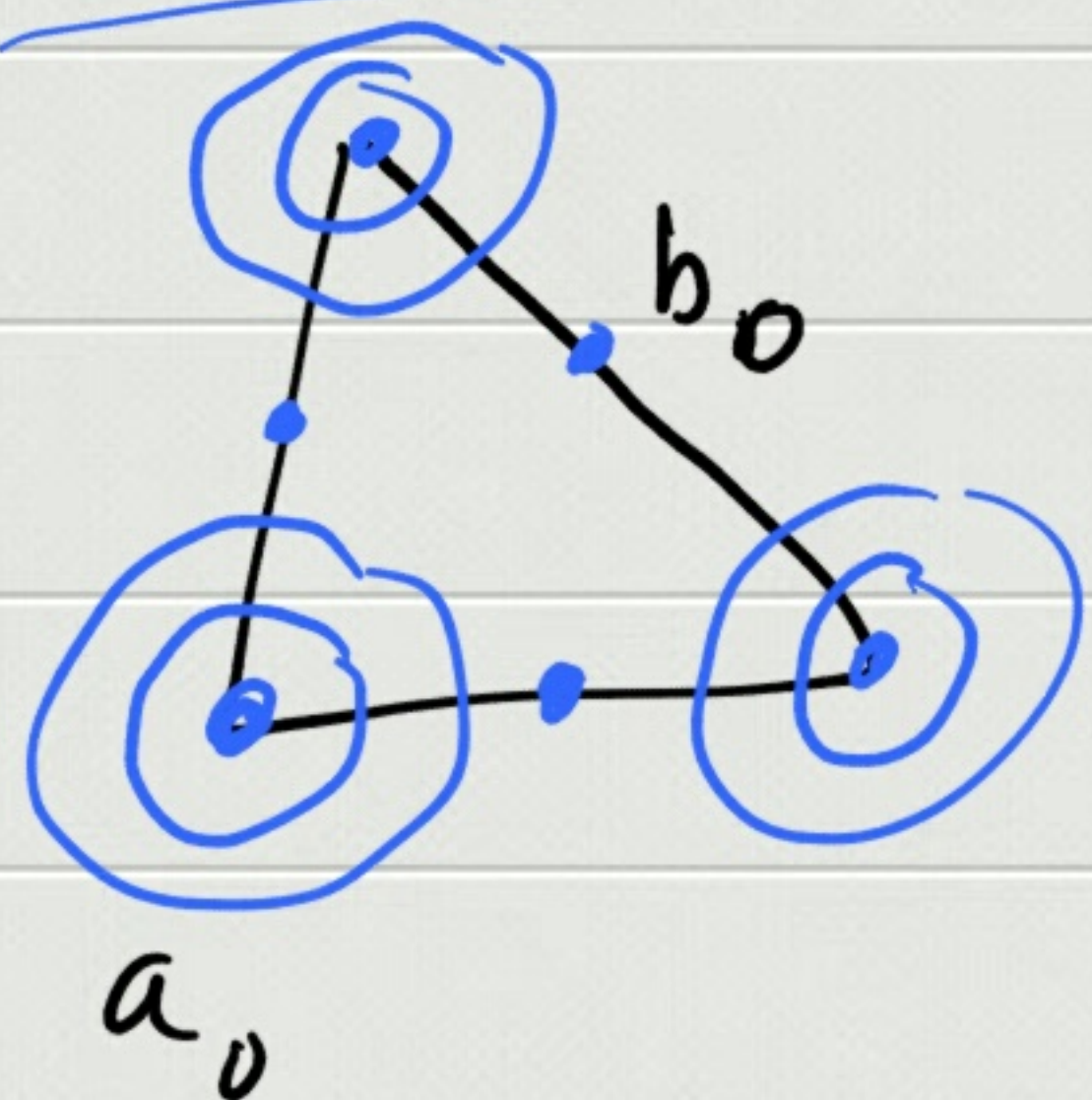


on définit  $P_K = \{ r \in P_3 \mid \psi(r) = 0 \}$   
 $\dim P_K = 10 - 1 = 9$ .

$\Sigma_K$ :

On a bien un E.F. mais on perd le raccord  $\mathcal{C}^1$ :  $V_h \notin \mathcal{C}^1$ .

E.F d'Angryis



$$\Sigma_K = \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \rightarrow \uparrow(a_i) \leftarrow 3 \\ \uparrow \rightarrow \uparrow'(a_i) \leftarrow 6 \\ \uparrow \rightarrow \uparrow''(a_i) \leftarrow 9 \\ \uparrow \rightarrow \uparrow(b_i) \leftarrow 3 \end{array} \right\}$$

Card  $\Sigma_K = 21$

$$P_K = S_P \left( \begin{array}{l} \mathbb{P}_3, x^4, x^3 y \\ \downarrow \\ \dim 10 \quad x^2 y, x y, y \\ x^5, x^4 y, x^3 y^2, x^2 y^3 \\ x y^4, y^5 \end{array} \right)$$

$\dim \mathbb{P}_K = \mathbb{P}_5$   
 $\dim \mathbb{P}_K = 21$

5) Mise en oeuvre des E.F.

5.1) Obtention d'un maillage.

$$\Omega_h = \bigcup_{T_i \in \mathcal{T}} T_i \subset \mathbb{R}^2$$

$T_i \in \mathcal{T}$  est un triangle.

et  $\mathcal{T}$  est admissible.

Card  $\mathcal{T} = N_T$  : nombre de triangle.

On suppose donné le tableau:

$T(i,j)$  : entier : le numéro de sommet de maillage.

$1 \leq i \leq N_T$  : numéro de triangle

$1 \leq j \leq 3$  : 1 des 3 de  $\mathcal{T}$  sommets de  $T_i$ .

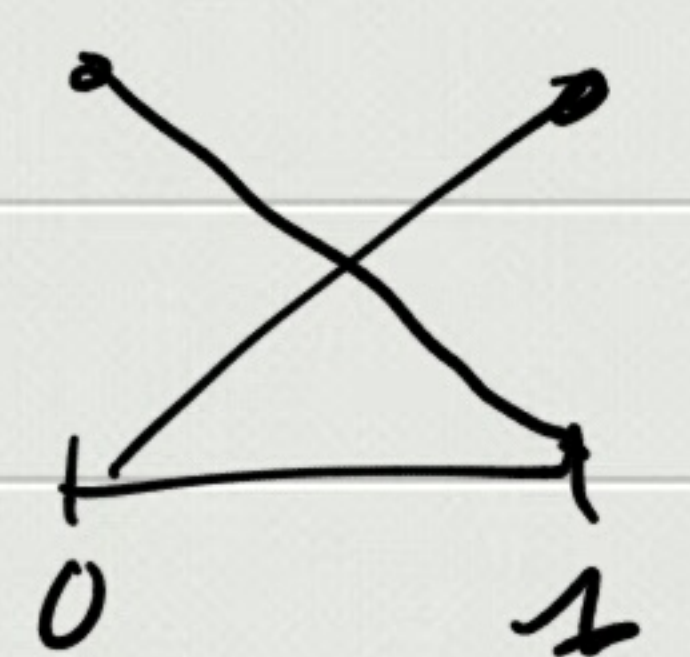
On suppose aussi donné le tableau:

$S(i, j)$ : réel: la coordonnée  $j=1 \dots 2$   
du sommet numéro  $i$ .  $1 \leq i \leq$  nbre de  
sommets  
de  $\mathcal{T}$ .

5.2) Construction d'une matrice élémentaire.

On veut ici construire les fonctions de  
base  $h^{\mathcal{P}_K}$ , restreintes à un élément  $K$  de.

référence

exple:  $d_{\text{dim}}=1, \mathcal{P}_1$ :   $K=(0,1)$

$$\varphi_1 = 1 - x$$

$$\varphi_2 = x.$$

$$S: a(u, v) = \int_{\mathcal{I}} u' v' dx = \sum_{\substack{\mathcal{T}_k \in \mathcal{T} \\ \mathcal{T}_k}} \int_{\mathcal{T}_k} u' v' dx$$

On va construire la matrice

$$el_{\mathcal{T}_k} = \left( \int_{\mathcal{T}_k} \tilde{\varphi}_i' \tilde{\varphi}_j' \right) \leftarrow i$$

si  $\mathcal{T}_k$  de longueur  $h$ :  $el_{\mathcal{T}_k} \hat{=} \begin{pmatrix} 1/h & -1/h \\ -1/h & 1/h \end{pmatrix}$

On pourra la construire à

$$\text{partir de } el_K = \left( \int_K \varphi_i' \varphi_j' \right) \\ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Plus généralement  $a(u, v) = \sum_K \int_K \alpha(u, v) dx$

$$el_K = \left( \int_K \alpha(\varphi_i, \varphi_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq \dim P_K \\ j = \text{Card } \Sigma_K}}$$

### 5.3) Construction du système global.

On rappelle que le système global associé à la méthode E.F. consiste à écrire :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \dim V_h = N \\ V_h = \text{Vect}(\phi_i, 1 \leq i \leq N)$$

$$a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i) \\ u_h \in V_h \quad \text{i.e.} \quad u_h = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j$$

La matrice globale du système

$$\text{est} \quad \left( a(\phi_j, \phi_i) \right) = A$$

On choisit  $\phi_i$  tq  $\phi_i|_K$  coincide

avec  $\varphi_k \quad k=1, 2, \dots, \text{Card } \Sigma_K$ .

On va construire la matrice A à partir de contributions partielles

issues des matrices élémentaires.

$$a(\phi_j, \phi_i) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \alpha(\phi_j, \phi_i) dx \\ \text{et} \int_{j_2} \alpha(\phi_j, \phi_i) dx$$

est une contribution partielle du coeff de  $A$ .

L'idée est de ne surtout pas chercher les contributions non triviales d'un coeff.  $A_{i,j}$ , mais de considérer toutes contributions non triviales attachées à l'élément  $K$  considéré (ie les coeffs de la matrice élémentaire  $el_K$ ) et de les reporter dans la matrice globale.

**ALGO** :  $A = \text{zeros}(\dim V_h, \dim V_h)$

// Parcours des éléments :

Pour  $k = 1 : \text{size}(T, 1)$

• construction de  $el$  associé à  $T(k, :)$

Pour  $i = 1 : \text{size}(el, 1)$

Pour  $j = 1 : \text{size}(el, 2)$

// Pour les E.F.  $P_n$  sommet

$A(T(k, i), T(k, j))$

$= A(T(k, i), T(k, j))$

$+ el(i, j)$

fin de pour

fin de pour

fin de pour

Exemple :  $P_1$ -sommet 1D.

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

F.V. associée : Trouver  $u \in V = H^1(0,1)$

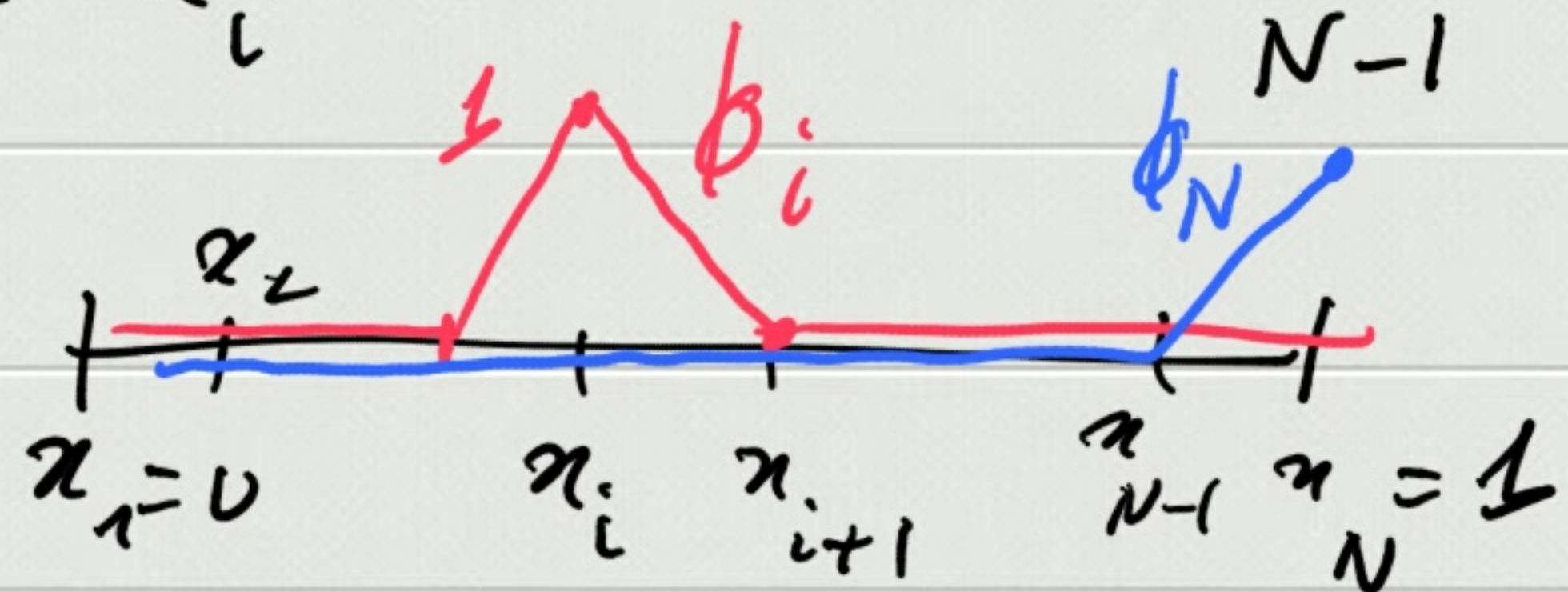
$$\begin{aligned} \text{tq } \forall v \in V, \quad a(u, v) &= \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx \\ &= \ell(v) = \int_0^1 f v dx \end{aligned}$$

F.V. approchée : Trouver  $u_h \in V_h$ ,

$$\text{tq } \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(0,1) \text{ tq } v_h|_{]x_i, x_{i+1}[} \in P_1, \right. \\ \left. 1 \leq i \leq N-1 \right\}$$

avec  $x_i = (i-1)h$  et  $h = \frac{1}{N-1}$ .



$$V_h = \text{Vect} \{ \phi_i, 1 \leq i \leq N \}$$

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$\dim V_h = N$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1/h & -1/h \\ -1/h & 1/h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h/3 & h/6 \\ h/6 & h/3 \end{pmatrix}$$

# ALGO

$N = 100; h = 1/(N-1);$   
 $x = [0:h:1];$   $el = 1/h * [1, -1; -1, 1] + h * [1/3, 1/6; 1/6, 1/3];$

$A = \text{diag}(\text{sparse}(\text{zeros}(N,1)), 0);$

for  $k = 1 : N-1$

// parcours des elements  $[x_k, x_{k+1}]$

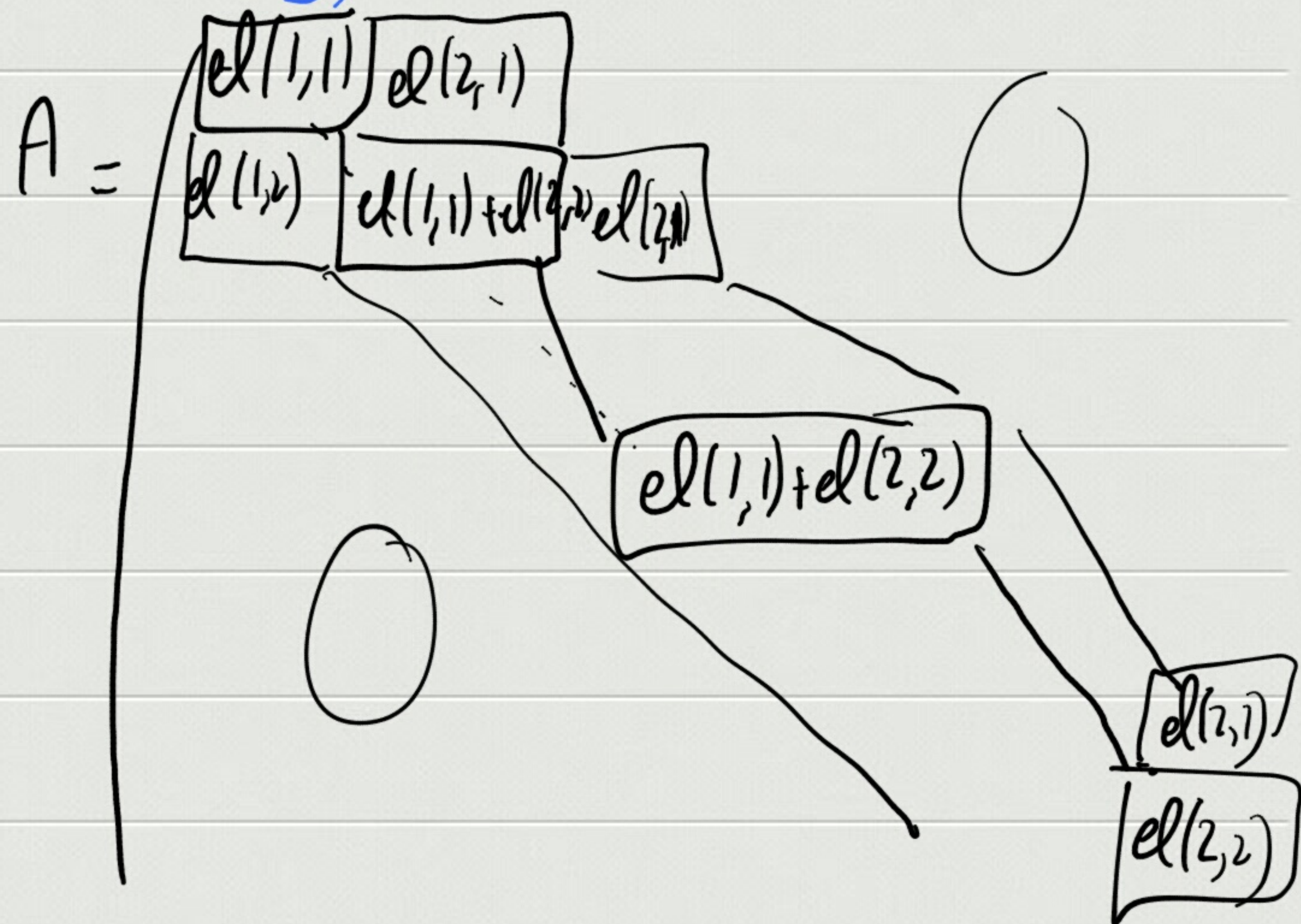
for  $i = 1 : 2$

for  $j = 1 : 2$

$A(k+i-1, k+j-1) = A(k+i-1, k+j-1)$   
 $+ el(i, j);$

end,

end





Exemple de CL diverses.

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$u'(0) = 2; \quad u(1) = 0$$

F. V.:  $\int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 f v dx - 2v(0)$

$$\forall v \in H_0^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1) \text{ tq } v(1) = 0\}$$

$$V_h = \left\{ v \in H_0^1(0,1) \text{ tq } v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1 \right\}$$



$$\dim V_h = N$$

$$V_h = \text{Vect} \{ \phi_i, 1 \leq i \leq N \}$$

ALGO:  $N = 100; h = 1/N;$

$$x = [0:h:1-h];$$

$$el = 1/h * [1, -1; -1; 1];$$

for  $k = 1:N-1$

// parcours des éléments sauf le dernier

for  $j = 1:2$

for  $i = 1:2$

$$A(k+i-1, k+j-1) = \text{idem}$$

$$+ el(i, j)$$

end  
end  
end

$$k = N; A(k, k) = \text{idem} + el(1, 1)$$

Chap.

Problème d'évolution  
parabolique.

Plan: I Equation type.

II Propriétés fondamentales.

1) Fourier en espace

2) Estimation d'énergie

III Schémas implicites

IV Schéma explicite et CFL

I Equation type de la chaleur

On s'intéresse au phénomène  
d'évolution d'une inconnue dépendant  
d'une autre variable que celle du  
temps décrivant l'évolution. L'autre  
variable représentée, en général, la position  
spatiale.

$t$ : temps

$x$ : position.

L'équation type de la chaleur est  
posée en temps positif (croissant)  
depuis une donnée initiale:

$u(t, x)$ : inconnue (exple température)

en espace pour définir

l'éq de la chaleur: 
$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = f(t, x), & t > 0 \\ & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

ou condition initiale  
ou donnée initiale  
ou donnée de Cauchy

$$u(0, x) = u_0(x)$$

correctement l'opérateur  
elliptique.

Exple: 
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = f, & t > 0, \\ & x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

C.I.  
ou donnée de Cauchy

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in ]0, 1[$$

C.L en  
espace

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t > 0$$

On pourra remplacer  $-\Delta_x$  par  
n'importe quel autre opérateur  
elliptique (on se limitera ici aux  
opérateurs d'ordre 2).

On pourra poser le problème pour  $x \in \Omega$ ,

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , on veut borné, mais il  
faudra alors rajouter des C.L.

II Propriétés formelles.

1) Fourier en espace.

On note  $\hat{u}(t, \zeta) = \mathcal{F}(u(t, x))$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\zeta \cdot x} u(t, x) dx$$

•  $\mathcal{F}$ : isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  de  $L^2(\mathbb{R}^d)$

•  $\mathcal{F}(\nabla u) = i\zeta \hat{u}$

•  $\mathcal{F}(\Delta u) = i\zeta \cdot \mathcal{F}(\nabla u)$   
 $= i\zeta \cdot i\zeta \hat{u} = -|\zeta|^2 \hat{u}$

On pose l'eq de la chaleur sur  $\mathbb{R}^d$ :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x) & , x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

On applique  $\mathcal{F}$  à l'équation:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + |\zeta|^2 \hat{u} = 0, & t > 0, \zeta \in \mathbb{R}^d \\ \hat{u}(0, \zeta) = \hat{u}_0(\zeta) \end{cases}$$

$$\hat{u} = \hat{u}(t, \zeta) \in \mathbb{R}^d$$

à  $\zeta$  fixé, on a obtenu un pb de Cauchy posé sur  $\mathbb{R}^d$ .

$$\hat{u}(t, \zeta) = \hat{u}_0(\zeta) e^{-|\zeta|^2 t}$$

On remarque que  $\|\hat{u}(t, \zeta)\|_{L^2} \leq \|\hat{u}_0(\zeta)\|_{L^2}$ ,

$$\|\hat{u}(t, \zeta)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \searrow \text{en } t.$$

En temps négatif, la dilatation rapide des hautes fréquences ( $K$  grand) interdira la résolu<sup>n</sup> de ce pb en temps  $\searrow$ .  
l'eq. de la chaleur est mal posée en temps  $\searrow$ . En temps  $\nearrow$ , le fort amortissement des hautes fréquences assure un phénomène de régularisat<sup>n</sup> de la solu<sup>n</sup> au cours du temps.

Exple : CI:

solu<sup>n</sup> à  $t > 0$

## 2) Estimation d'énergie.

On va retrouver des comportements qualitatifs d'amortissement par estimation d'énergie (On se base sur des formules faibles) qui autorise à travailler sur domaine borné avec différents type de conditions aux limites.

On fait le calcul formel suivant: on choisit comme fonction test la solu<sup>n</sup> elle-même.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t > 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \leftarrow \text{C.L.} \\ u(t=0, \cdot) = u_0(\cdot) & \leftarrow \text{C.I.} \end{cases}$$

On multiplie par  $u$  et on intègre sur  $\Omega$ , on trouve (formellement):

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \partial_t u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} 0 dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0$$

$$\hookrightarrow \|u^2(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \searrow \text{ent. } > 0$$

On a ici par inégalité de Poincaré (C.L. de type Dirichlet)

$$\int |\nabla u|^2 dx \geq c \int |u|^2 dx.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2c \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

$$y(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2.$$

$$\hookrightarrow y'(t) + 2c y(t) \leq 0.$$

$$y(0) = \|u_0\|_{L^2}^2.$$

$$0 \leq y(t) \leq y(0) e^{-2ct}.$$

D'où la  $\searrow$  vers 0 de  $\|u(t, \cdot)\|_{L^2}$ .

### III Schémas implicites

1) Schémas pour EDO et pb de Cauchy.

On se donne le pb de Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\lambda > 0$ , On connaît l'unique sol<sup>u</sup> de ce problème de Cauchy:

$$u(t) = u_0 e^{-\lambda t}.$$

On va l'approcher par un schéma numérique.

$$u^m \sim u(t_n) \text{ avec } t_n = n \Delta t$$

$\Delta t > 0$ : pas de discrétisa<sup>n</sup>.

$$u'(t_n) \sim \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$$

On définit la suite  $(u_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$  par

le schéma numérique:

$$(EE) \begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \lambda u^n = 0 \\ u^0 = u_0 \end{cases}$$

ou encore le schéma

$$(EI) \begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \lambda u^{n+1} = 0 \\ u^0 = u_0 \end{cases}$$

Le premier schéma (EE) se nomme le schéma d'Euler explicite.

Le second (EI), se nomme Euler implicite.

Ce vocabulaire est justifié par le fait que dans (EE)  $u^{n+1}$  se déduit de  $u^n$  aisément, même si  $\lambda u$  est remplacé par un terme plus général comme  $g(u)$ . Dans (EI),  $u^{n+1}$  se déduit de  $u^n$  au prix de la résolution d'une équation.

Pour  $g(u) = \lambda u$ , cette eq. est

certes triviale à résoudre :

$$(EE): u^{n+1} = u^n - \delta t \lambda u^n$$

$$(EI): u^{n+1} (1 + \lambda \delta t) = u^n$$

$$\text{soit } u^{n+1} = \frac{1}{1 + \lambda \delta t} u^n.$$

Dans les 2 cas, on a ici des suites géométriques de raison :

$$(EE): r = 1 - \lambda \delta t$$

$$(EI): r = \frac{1}{1 + \lambda \delta t}$$

le schéma (EE) peut conduire



à une raison  $\alpha < -1$  et

ainsi faire diverger la suite.

Le comportement sera alors très loin de la décroissance de  $|u(t, \cdot)|$  vers 0.

Ceci ne pourra pas arriver si  $\delta t < \frac{1}{\alpha}$ .

qui assure  $\alpha > 0$  (et donc pas de changement de signe de la suite).

En revanche, avec (E I), la raison  $0 < \alpha < 1$  quel que soit  $\delta t > 0$ .

2) Schéma d'Euler explicite pour la

chaleur.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{(Dirichlet)} \\ u(t=0, \cdot) = u_0(\cdot) & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

$u^n(x) \approx u(t_n, x)$

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\delta t} - \Delta u^{n+1}(x) = 0, \\ u^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u^0 = u_0 \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

$(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies par récurrence.

Le pb identifié en  $\square$  est un problème aux limites elliptiques :

$$\begin{cases} \left( \frac{\text{Id}}{\delta t} - \Delta \right) u^{n+1} = \text{donné} = \frac{u^n}{\delta t} \\ + \text{CL Dirichlet: } u^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Si  $u_0 \in L^2$ , alors  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien

définie dans  $H^1_0(\Omega)$ . En fait, on

a mieux :  $-\Delta u^1 = \frac{u^0}{\delta t} - \frac{u^1}{\delta t} \in L^2$ .

$\hookrightarrow u^1 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$

$$\text{et } -\Delta u^2 = \frac{u^1}{\delta t} - \frac{u^2}{\delta t} \in H^1 \cap H^1_0$$

$$\hookrightarrow u^2 \in H^2 \cap H^1_0 \dots$$

Le plus important est que la suite  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée dans  $L^2(\Omega)$

uniformément par rapport à  $\delta t$ .

et on a  $\hat{m} \rightarrow$  vers 0.

• Démontrons que la suite  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2$  uniformément en  $\delta t$ .

Multiplions l'eq par  $u^{n+1}$  et  
intégrons en espace:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{u^{n+1}}{\delta t} \right)^2 + \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1} \, dx \\ = \int_{\Omega} \frac{u^n u^{n+1}}{\delta t} \, dx$$

Par  $\delta t > 0$  de  $\int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1}$ , on a

$$\|u^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \int_{\Omega} u^n u^{n+1} \, dx \leq \|u^n\|_{L^2}$$

par Cauchy-Schwarz.  
 $\nearrow \|u^{n+1}\|_{L^2}$

Et ainsi,

$$\|u^{n+1}\|_{L^2} \leq \|u^n\|_{L^2}.$$

La suite est  $\searrow$  en norme  $L^2$ , quel  
que soit  $\delta t$ .  $\square$ .

Exercice: Généralisons cette prop.  
pour l'eq. de la chaleur avec  
terme source.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x), & t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & x \in \Omega \\ u(t=0, \cdot) = u_0(\cdot) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Supposons  $f \in L^2(\Omega)$ , montrons

d'abord (formellement) que  $u \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2_\Omega)$

On refait le m<sup>^</sup>me calcul:  $\int_\Omega \text{eq} \times u$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u(t, x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega f u dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\ &\leq c \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \text{ (Poincaré)} \\ &\leq \frac{c^2 \|f\|^2}{2} + \frac{\|\nabla u\|^2}{2} \end{aligned}$$

On a:

$$\frac{d}{dt} \int |u|^2 dx + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq c^2 \|f\|^2$$

Par Poincaré (encore):

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{c^2} \|u\|_{L^2}^2 \leq c^2 \|f\|^2$$

$$\text{Ainsi, } \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\frac{t}{c^2}} + \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{c^2}} \|f\|^2 ds$$

$$c^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{c^2}}\right) \|f\|^2$$

$$\hookrightarrow \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|^2 + c^2 \|f\|^2$$



$$y_{n+1} + \frac{\delta t}{2c^2} y_{n+1} \leq y_n + \frac{\delta t c^2}{2} \|f\|_{L^2}^2$$

Rqne: Cette preuve se généralise au cas où  $f = f(t, x)$  avec  $f^n = f(t_n, x)$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ ;  $\sup_n \|f^n\|_{L^2} \leq K$ .

Ainsi  $0 \leq y_n \leq z_n$ , avec  $z_n$  la suite réelle arithmético-géométrique:

$$z_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\delta t}{2c^2}} z_n + \frac{\delta t c^2}{2 + \frac{\delta t}{2c^2}} K$$

la raison  $r = \frac{1}{1 + \frac{\delta t}{2c^2}}$  est  $> 0$  et  $< 1$ ,

et  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ .

$$l = \frac{1}{1 + \frac{\delta t}{2c^2}} l + \frac{\delta t c^2}{2 + \frac{\delta t}{2c^2}} K$$

$$\text{Soit } \frac{\delta t}{2c^2} l = \frac{\delta t c^2}{2} K$$

$$l = c^4 K, \text{ ind de } \delta t.$$

Ainsi la suite  $(z_n)_n$  (et donc  $(y_n)_n$ )

est bornée uniformément en  $\delta t$  so.

□

3) Schéma de Crank Nicholson.

On propose un autre schéma implicite, plus précis (ou en

de consistance d'ordre 2 en temps).

Par simplicité, on se limite à l'éq de la chaleur sans terme source:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ + CL \\ + CI \end{cases}$$

Le schéma de Crank-Nicholson s'écrit:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} - \Delta \left( \frac{u^n + u^{n+1}}{2} \right) = 0 \quad (CN)$$

Ce schéma est inconditionnellement

$L^2$ -stable ( $L^2$ -A-stable). On

le prouve en prenant le produit scalaire  $L^2(\Omega)$  de l'éq (CN)

par  $u^n + u^{n+1}$  et on obtient,

par coercivité de  $(-\Delta)$  que:

$$\left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t}, u^{n+1} + u^n \right)_{L^2} \leq 0$$

$$\text{Ainsi } \|u^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \|u^n\|_{L^2}^2.$$

Puis la  $\searrow$  de  $(\|u^n\|_{L^2})_{n \in \mathbb{N}}$

et donc la A-stabilité inconditionnelle pour la norme  $L^2$ .

⚠ On est en limite de A-Stabilité inconditionnelle, l'inconvénient est

l'absence de régularisation de ce schéma (à observer par une donnée discrète)

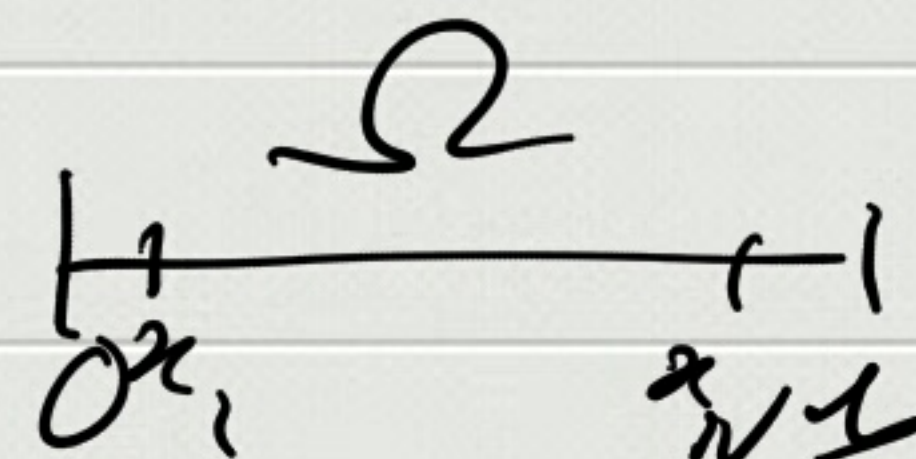
### III Schémas explicites

Vu le mauvais comportement de ce schéma sur les eq amorties pour  $\lambda$  grand (cf I), limitai de  $\delta t$  en fonction de  $\lambda$ , et comme l'eq de la chaleur (pb type parabolique) est une eq amortie freq. par freq avec un amortissement en  $|\xi|^2$ , on s'attend à des pbs et des limitai sur  $\delta t$ . On va introduire d'abord une discrétisation spatiale par limites

les fréquences.

On considère le toy modèle:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx}^2 u = 0 & t > 0, x \in ]0,1[ \\ u(t=0, \cdot) = u_0(\cdot) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (CL) \end{cases}$$



On propose une discrétisation spatiale D.F. centrée avec  $x_i = ih$   
 $1 \leq i \leq N$

$$x_{N+1} = 1 \quad \boxed{h = \frac{1}{N+1}}$$



L'approximation spatiale conduit au système d'EDO:

$$\partial_t W(t) + M W(t) = 0$$

avec  $W(t) \in \mathbb{R}^N$  et  $M = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & -1 & 2 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

M est définie positive:

$$M W \cdot W \geq c \|W\|_{\mathbb{R}^N}^2$$

↑  
p.s. de  $\mathbb{R}^N$ .

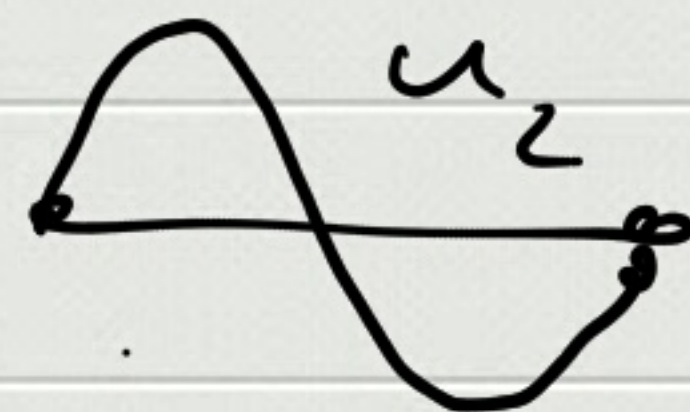
(analogue discret de la prop. d'ellipticité de  $-\partial_{xx}^2$ )

Requie annexe pour

$$u(x) = \sum d_i u_i(x) \quad \text{lien avec EDO aux limites}$$

$u_i$ : vecteur propre de  $(-\Delta) + CL$  Dirichlet

associé à la v.p.  $\lambda_i$

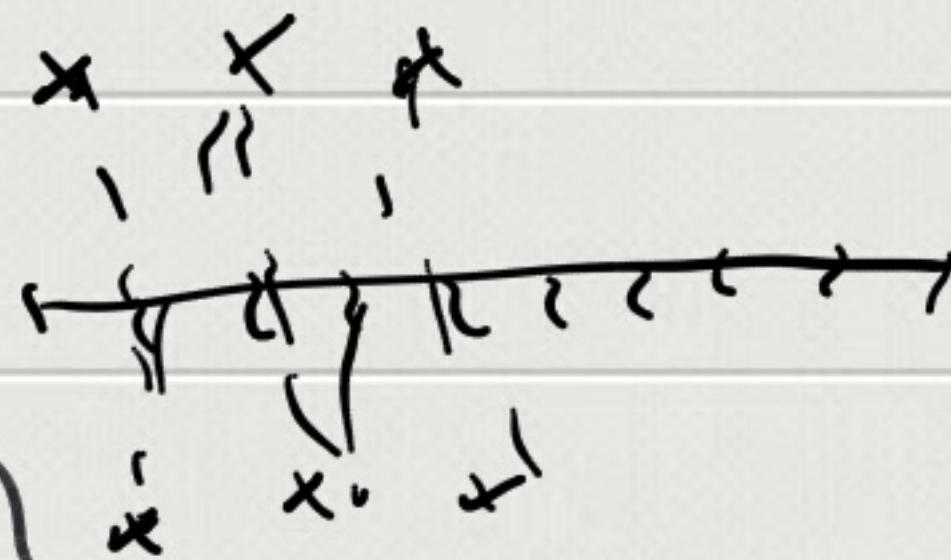


$$-u_i'' = \lambda_i u_i$$

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

$$\partial_t u_i + \lambda_i u_i = 0$$

$$u(t, x) = \sum \alpha_i(t) u_i(x)$$



$$\begin{aligned} \partial_t u &= \sum \alpha_i'(t) u_i(x) \\ -\Delta u &= \sum \alpha_i(t) \lambda_i u_i(x) \\ \alpha_i'(t) + \lambda_i \alpha_i(t) &= 0 \end{aligned}$$

Le schéma d'Euler explicite pour le système linéaire :

$$\partial_t W(t) + \Pi W(t) = 0$$

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\delta t} + \Pi W^n = 0.$$

$$W^n \in \mathbb{R}^N$$

L'intérêt d'un schéma explicite est qu'une itération est simple et peu coûteuse (produit matrice vecteur)

$$W^{n+1} = W^n - \delta t \Pi W^n$$

$$W^{n+1} = (\text{Id} - \delta t \Pi) W^n.$$

Ce schéma sera stable si et seulement si  $|\rho(\text{Id} - \delta t \Pi)| \leq 1$ .

$\Pi$  possède que des valeurs propres ~~positives~~ réelles et  $> 0$ .

$\delta t$  sera limité par la plus gde valeur propre de  $\Pi$   $\lambda_{\max}$ .

$$1 - \delta t \lambda_{\max} > -1.$$

$$\text{et } \hat{m} \text{ ————— } > 0$$

pour un comportement sans  
artefact (changement de signe, non  
respect de borne min-max ...).

$$1 - \delta t \lambda_{\max} > 0$$

$$\delta t \leq \frac{1}{\lambda_{\max}} \approx \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

Or la plus gde v.p de  $\Pi$ :  $\lambda_{\max}$   
est de l'ordre de  $1/h^2$ .

$$\text{Soit } \delta t \leq \alpha h^2.$$

On va exhiber cette condition  
restrictive sur le pas de temps  
en fonction du pas d'espace  
(appelée condition CFL:  
Courant-Friedrich-Lax) pour  
la norme  $L^\infty$ .

$$u_i^{n+1} = \left(1 - 2 \frac{\delta t}{h^2}\right) u_i^n$$

$$\text{Si } \delta t \leq \frac{h^2}{2}, \text{ alors } 1 - 2 \frac{\delta t}{h^2} > 0$$

et les poids de  $U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n$  sont  
alors positifs et de somme égale à 1 :

$$1 - 2\frac{\delta t}{h^2} + \frac{\delta t}{h^2} + \frac{\delta t}{h^2} = 1.$$

Ainsi,  $U_i^{n+1}$  est une combinaison  
convexe de  $U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n$

et donc

$$\min(U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n) \leq U_i^{n+1} \leq \max(U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n)$$

$$\text{et donc } \min_j U_j^n \leq U_i^{n+1} \leq \max_j U_j^n$$

On obtient donc la  $L^\infty$ -stabilité

$L^\infty$  du schéma sous CFL

$\delta t \leq h^2/2$  et on a mieux :

Le schéma respecte le principe  
du maximum.



## Chap 3

### Problème d'advection.

#### I Advection sur espace normé.

On s'intéresse à un phénomène de transport sous l'effet d'un champ de vitesse  $V(t, x)$ .

L'éq d'advection, ou transport, s'écrit :

$$\partial_t u + V \cdot \nabla u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d.$$

avec  $V(t, x) \in \mathbb{R}^d$ .

$u(t, x)$  : la quantité transportée.

Cette équation coïncide avec une éq. de conservation de masse seulement si  $\operatorname{div} V = 0$ .

Eq de conservation de  $u$  :

$$\partial_t u + \operatorname{div}(Vu) = 0.$$

$$\hookrightarrow = (\operatorname{div} V)u + V \cdot \nabla u$$

1) Eq. des caractéristiques.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$   
On cherche une courbe :  $t \rightarrow x(t)$  paramétrée par le temps  $t$ , sur laquelle on peut résoudre l'EDP considérée par la résolu<sup>n</sup> d'une EDO. Pour l'EDP d'advection

le  $u$  sera constante sur cette courbe, appelée caractéristique.

Soit  $x(t)$  donné, on injecte  $u(t, x(t))$  dans l'EDP:

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \partial_t u + \underbrace{x'(t)}_{\mathbb{R}^d} \cdot \underbrace{\nabla u}_{\mathbb{R}^d}$$

Si on choisit  $x'(t) = V(t, x(t))$ ,

alors si  $u$  est solution de l'EDP ( $\partial_t u + V \cdot \nabla u = 0$ ) on a :

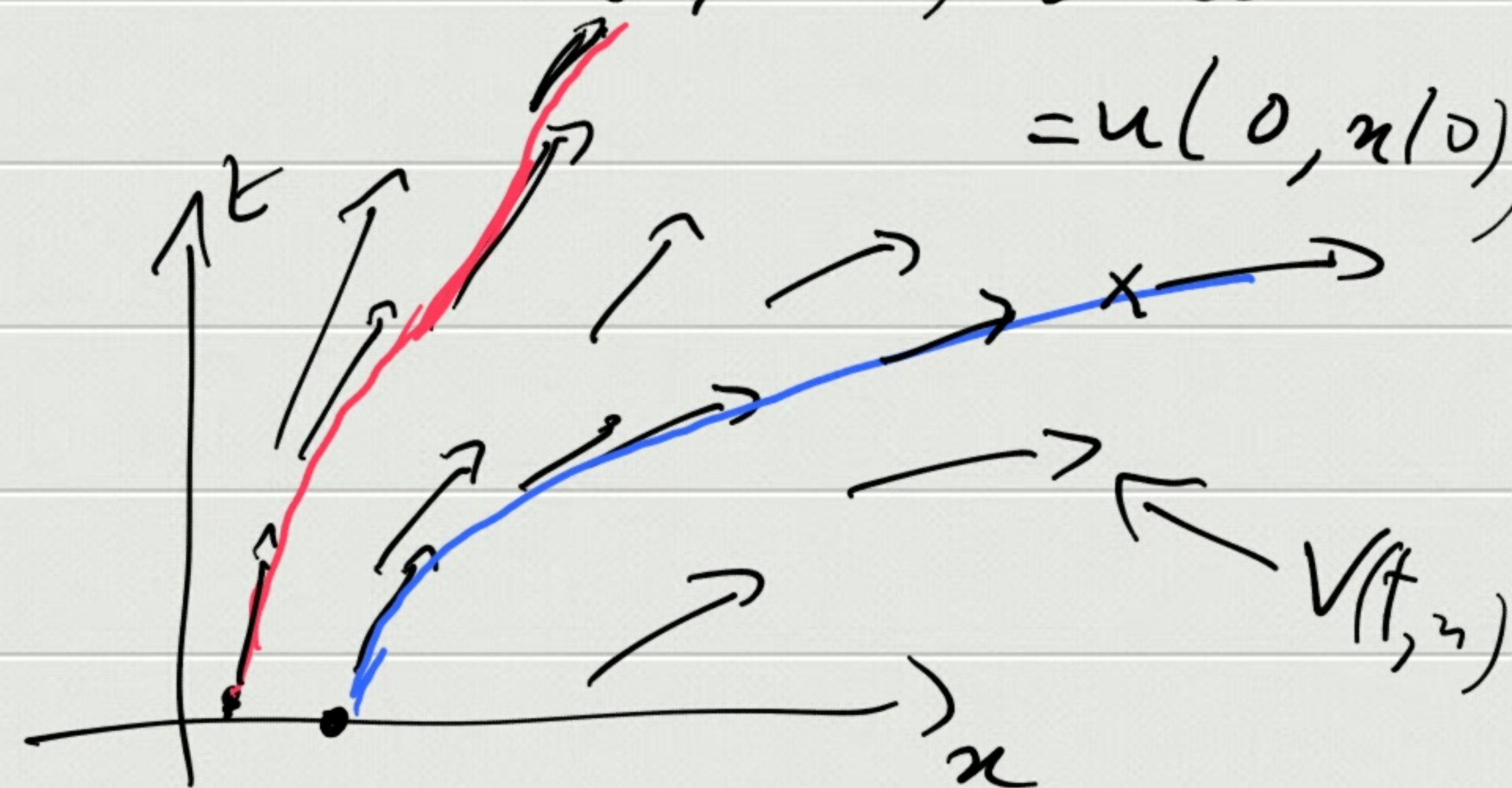
$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = 0$$

Ainsi, le long des courbes

$$\text{vérifiant } x'(t) = V(t, x(t))$$

On a  $u(t, x(t)) = \text{cte}$

$$= u(0, x(0))$$



2) Cas 1D,  $V = \text{cte}$ .

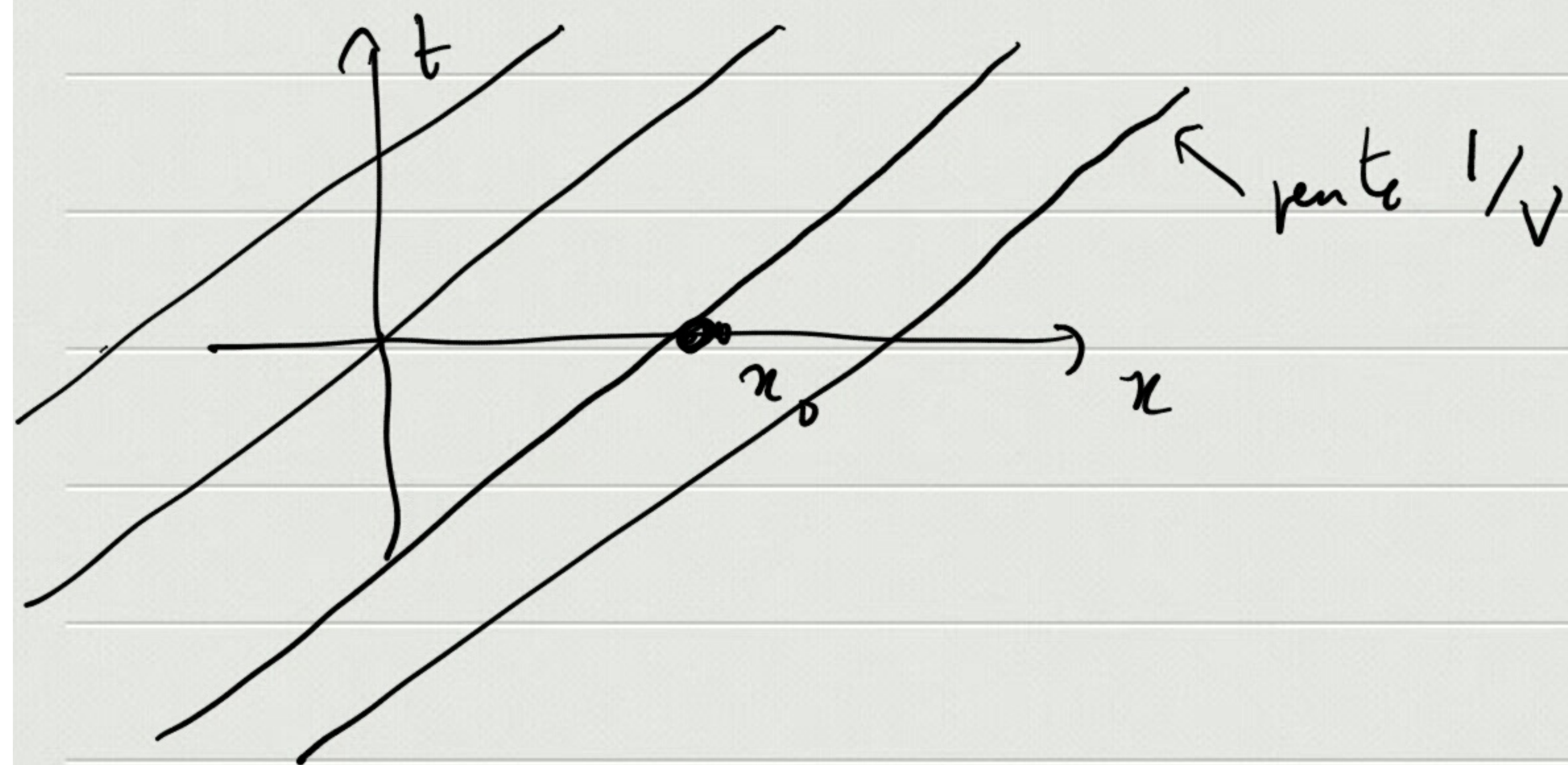
Dans le cas 1D, à vitesse constante, l'EDP n'écrit

$$\partial_t u + V \partial_x u = 0$$

Eq des caractéristiques:

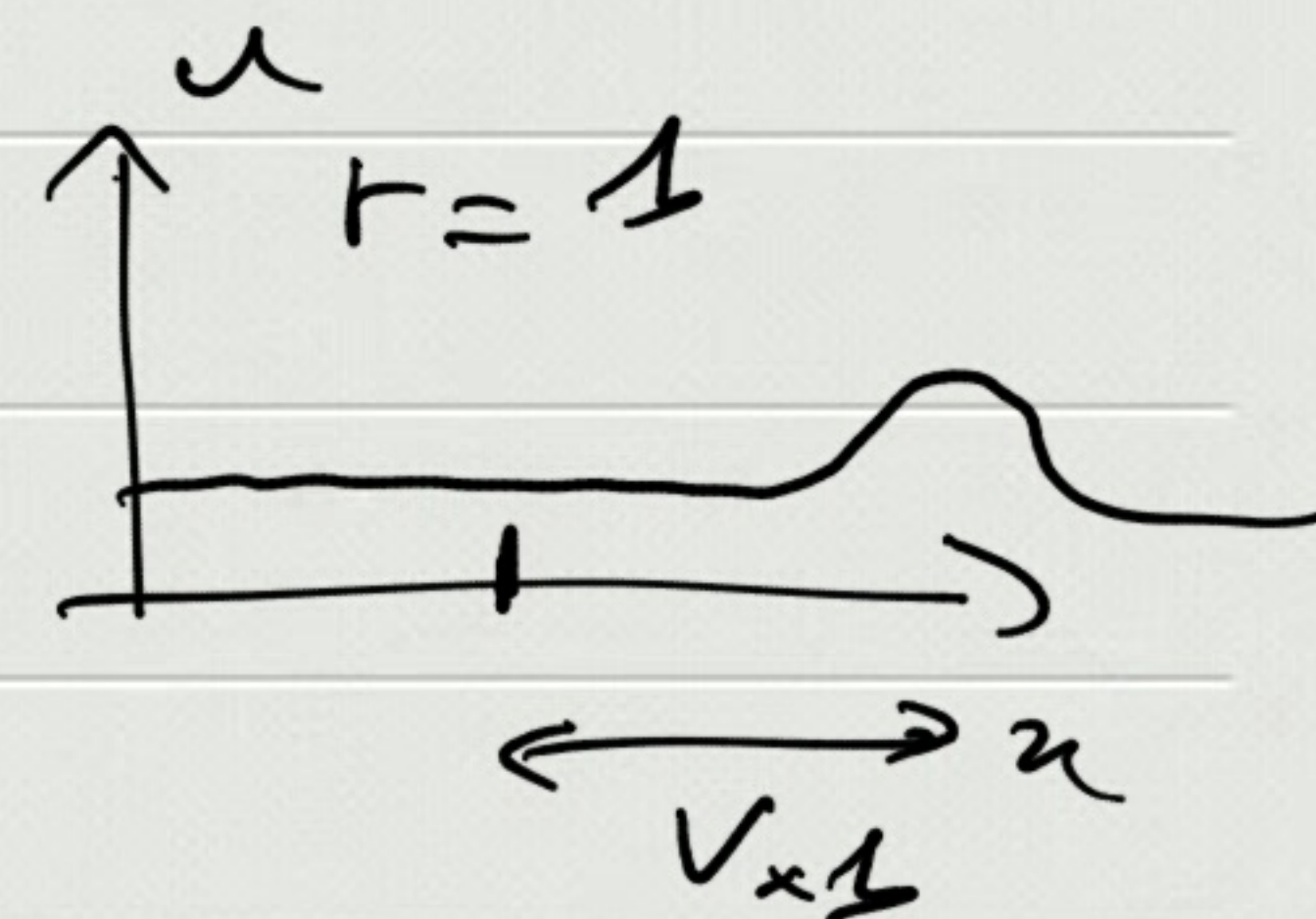
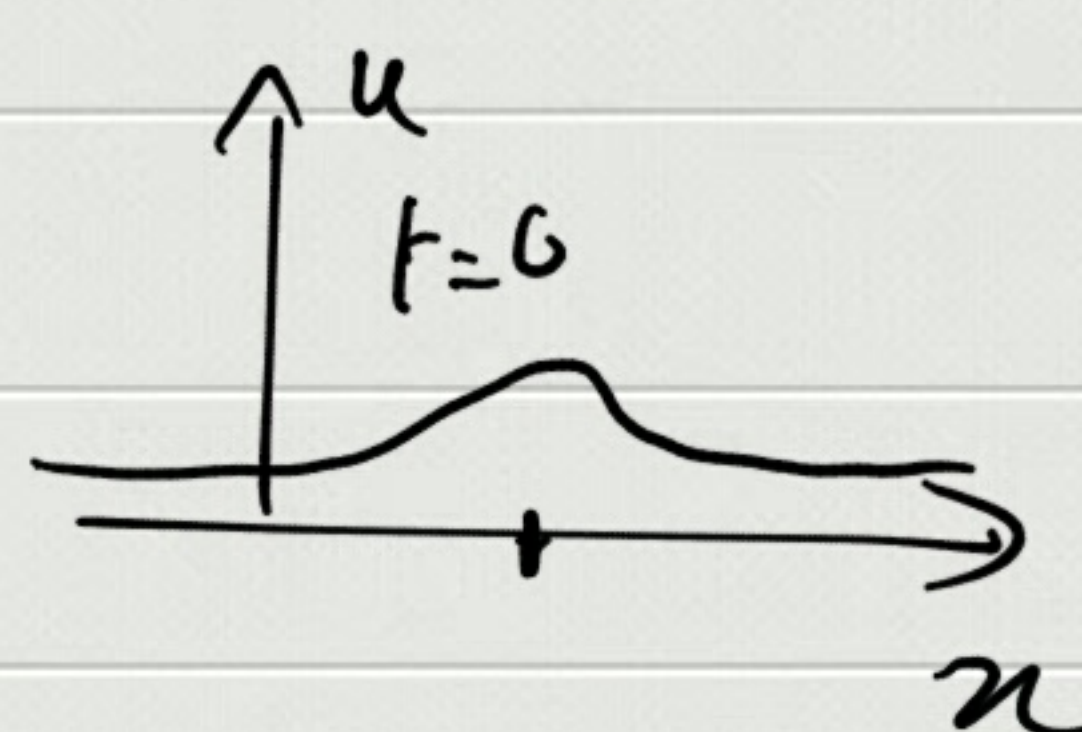
$$x'(t) = V$$

Soit  $x(t) = x_0 + Vt \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ .



$$u(t, x) = u(0, x - Vt)$$

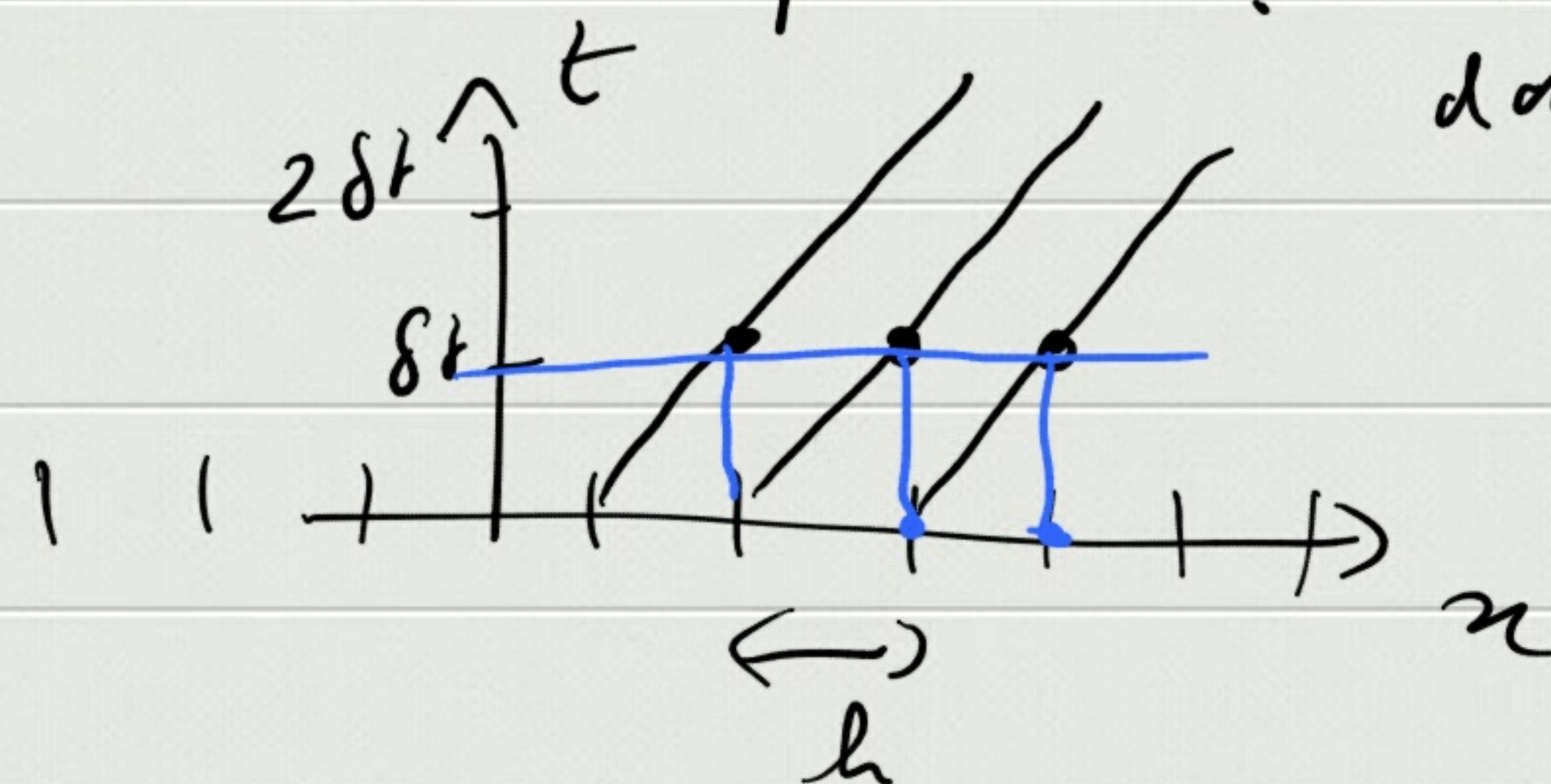
d'après l'éq des caractéristiques.



( $V > 0$  sur l'exemple)

• Schéma exact pour 1D,  $u(0, x)$  donné.

Si  $V > 0$





En choisissant bien  $\delta t$ , on peut faire

$$\text{en sorte que } u(t + \delta t, x) = u(t, x - h) \\ (V > 0) \qquad \qquad \qquad = u(t, x - V\delta t)$$

Il suffit de choisir  $V\delta t = h$ .

$$\text{ie } \boxed{\delta t = \frac{h}{V}}$$

Avec la notation  $u_i^m = u(m\delta t, x_i)$

avec  $x_{i+1} - x_i = h$ .

$$u_i^{m+1} = u_{i-1}^m$$

On va partir de l'EDP et

d'une discrétisation arbitraire pour

retrouver le schéma exact

lorsque  $\delta t = h/V$ :

$$\partial_t u(t_n, x_i) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t}$$

Si  $V > 0$

$$\partial_x u(t_n, x_i) = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}$$

On construit ainsi un schéma explicite:

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} + V \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h} = 0$$

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\delta t V}{h}\right) u_i^n + \frac{\delta t V}{h} u_{i-1}^n \quad (S)$$

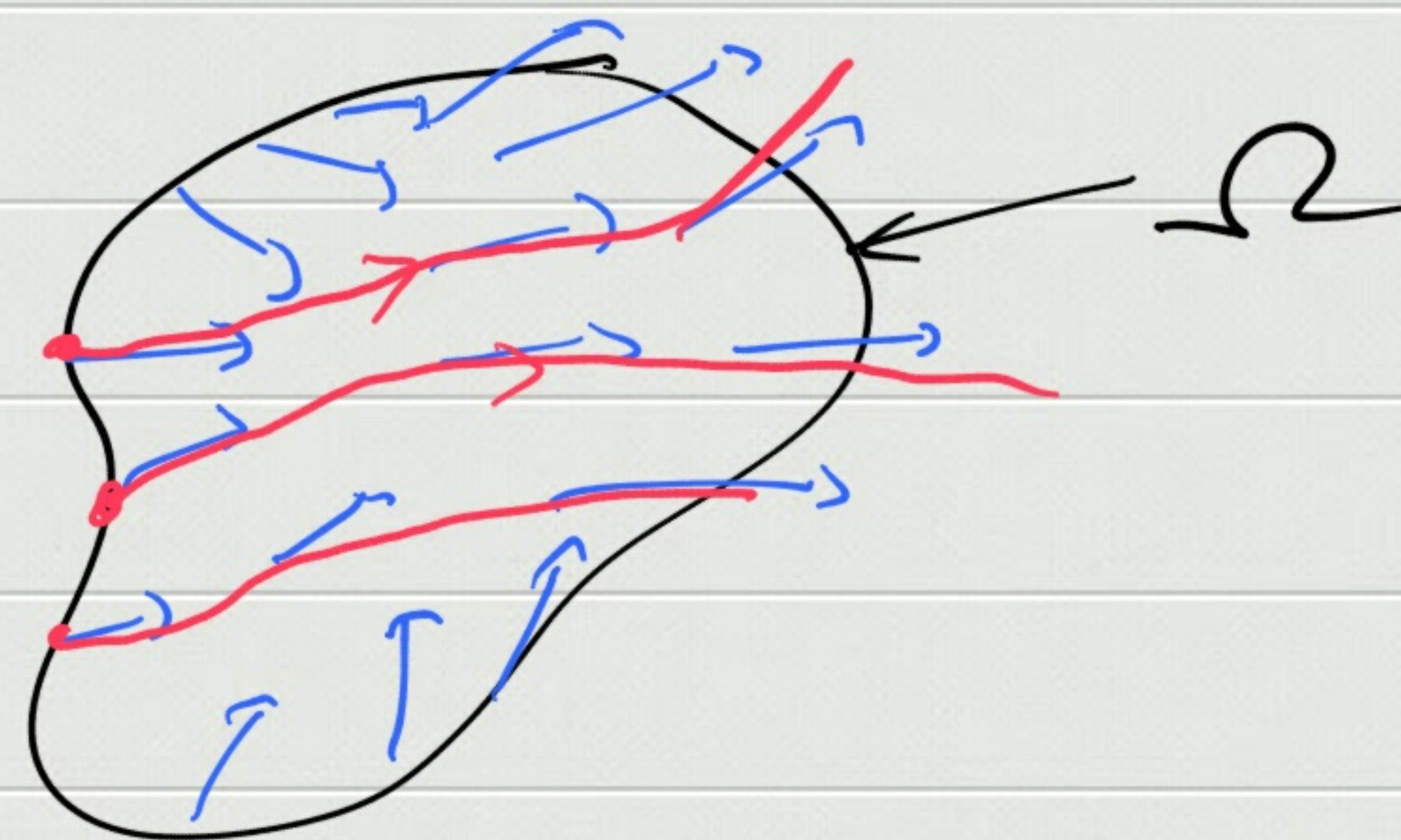
Si  $\delta t = \frac{h}{V}$ , on retrouve le schéma exact.

Rque : Si  $\delta t \leq \frac{h}{V}$ ,  $u_i^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $u_i^n$  et  $u_{i-1}^n$ . Donc le schéma (S)

respecte le principe du max si  $\delta t \leq h/V$ , et est donc  $L^\infty$ -stable.

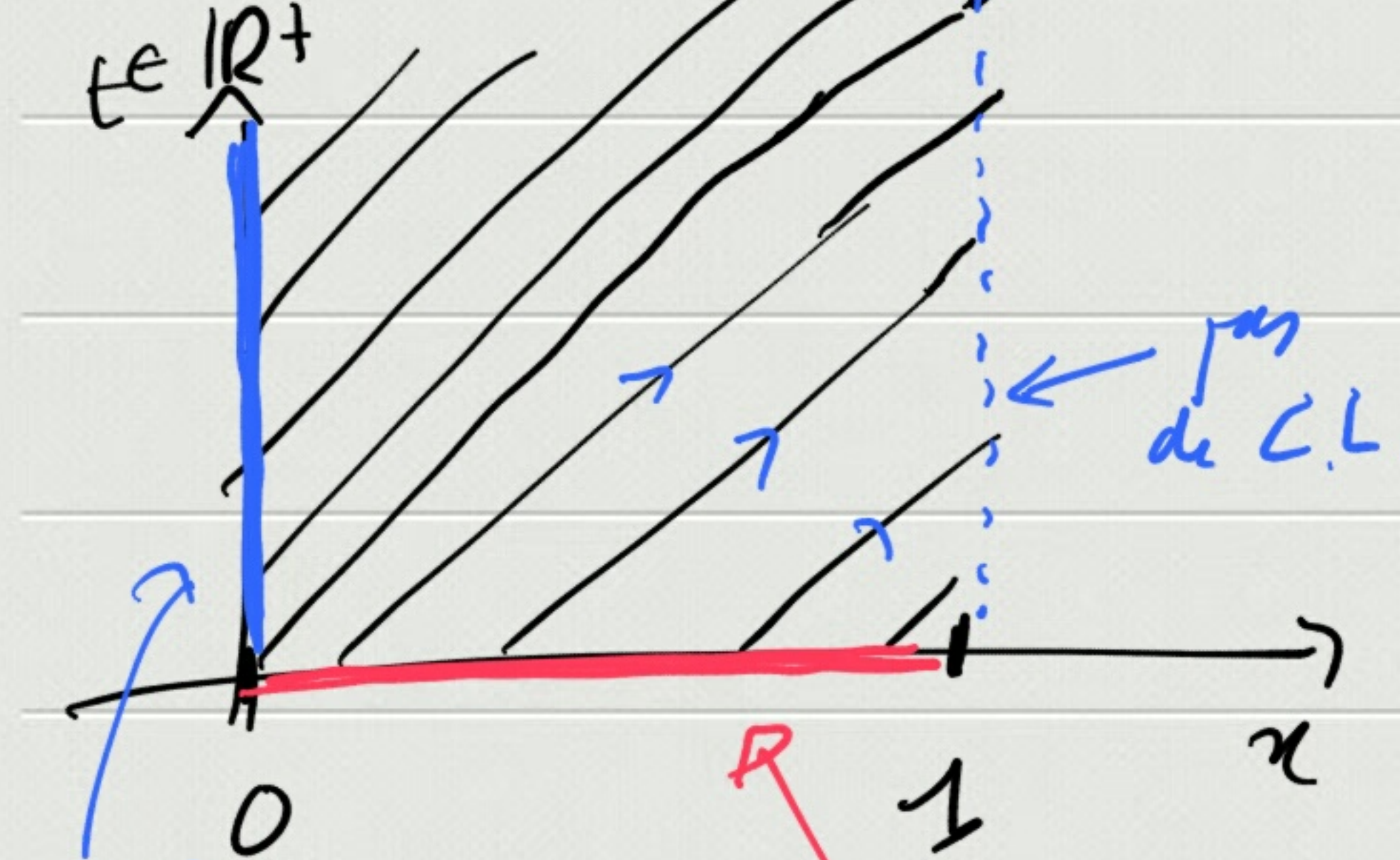
## II Advection sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ .

On veut résoudre la  $\tilde{m}$  EDP sur  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$  ( $\partial(t, x)$ )



On peut appliquer la méthode des caractéristiques et constater qu'aucune information n'est nécessaire là où  $V$  est sortant du domaine. En revanche, il faut connaître  $u$  là où  $V$  est entrant.

En 1D :  $\Omega = ]0, 1[$



$V > 0$   
 $V$  constante en  $x=1$   
 $V$  entrant en  $x=0$

une donnée du problème c'est la condition limite au bord entrant.

l'informa est aussi nécessaire c'est la condition initiale en  $t=0$ .

Le pb d'advection sur  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$  dit donc s'écrire:

$$\begin{cases} \partial_t u + V \cdot \nabla u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \underline{u(0, x) = u_0(x)} & (C.I), x \in \Omega \\ \underline{u(t, x) = u_b(x)} & (C.L), \\ & x \in \partial\Omega(t), t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\partial\Omega(t) \left\{ x \in \partial\Omega \text{ tq } V(t, x) \cdot n < 0 \right\}$$

III Analyse de stabilité par Fourier discret.

On se donne  $u(x)$  une fonction périodique définie sur un domaine périodique  $(0,1)$

On a la décomposition en Fourier discret:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{2i\pi kx}$$

$$\text{et } \hat{u}_k = \int_0^1 u(x) e^{-2i\pi kx} dx$$

On dispose de la formule de Plancherel:

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx = \sum_k |\hat{u}_k|^2$$

Ainsi, pour assurer la stabilité  $L^2$  d'un schéma en temps et en espace

il suffira de contrôler

$|\hat{u}_k|$  au cours des itérations en temps ( $\searrow$ ).

Les calculs de stabilité seront simplifiés car:

$v(x) = u(x+h)$  vérifie:

$$\hat{v}_k = \hat{u}_k e^{2i\pi kh}$$

Exercice: étudier la stabilité  $L^2$  du schéma (S)

$$(N=1) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

En passant en Fourier discret:  $\forall k \in \mathbb{Z}$ :

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^n}{\delta t} + \frac{\hat{u}_k^n - \hat{u}_k^{n-1} e^{2i\pi kh}}{h} = 0$$

$$\text{Soit } \hat{u}_k^{n+1} = \left( 1 - \frac{\delta t}{h} + \frac{\delta t}{h} e^{-2i\pi kh} \right) \hat{u}_k^n$$

$$|A|^2 = \left( 1 + \frac{\delta t}{h} (c-1) \right)^2 + \left( \frac{\delta t}{h} \Delta \right)^2$$

$$\text{avec } c = \cos 2\pi kh \quad \Delta = \sin(2\pi kh)$$

$$\begin{aligned} |A|^2 &= 1 + \left(\frac{\delta t}{h}\right)^2 (c-1)^2 + 2\frac{\delta t}{h}(c-1) + \left(\frac{\delta t}{h}\right)^2 \Delta^2 \\ &= 1 + \left(\frac{\delta t}{h}\right)^2 - 2c\left(\frac{\delta t}{h}\right)^2 + 2\frac{\delta t}{h}(c-1) \end{aligned}$$

$$|A|^2 = 1 + 2\left(\frac{\delta t}{h}\right)^2 (1-c)$$

$$+ 2\frac{\delta t}{h}(c-1)$$

$$= 1 - 2\frac{\delta t}{h}(1-c)\left(1 - \frac{\delta t}{h}\right)$$

On conclut que le schéma proposé est  $L^2$  stable sous la CFL  $\delta t \leq h$ .

Schéma de Richardson:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n \left( 1 + \frac{\delta t}{2h} \left( e^{-2i\pi kh} - e^{+2i\pi kh} \right) \right)$$

$$- 2i \sin(2\pi kh)$$

Ici le module d'amplification est toujours  $> 1$ !

Ce schéma n'est jamais stable.  
A ne surtout pas utiliser!

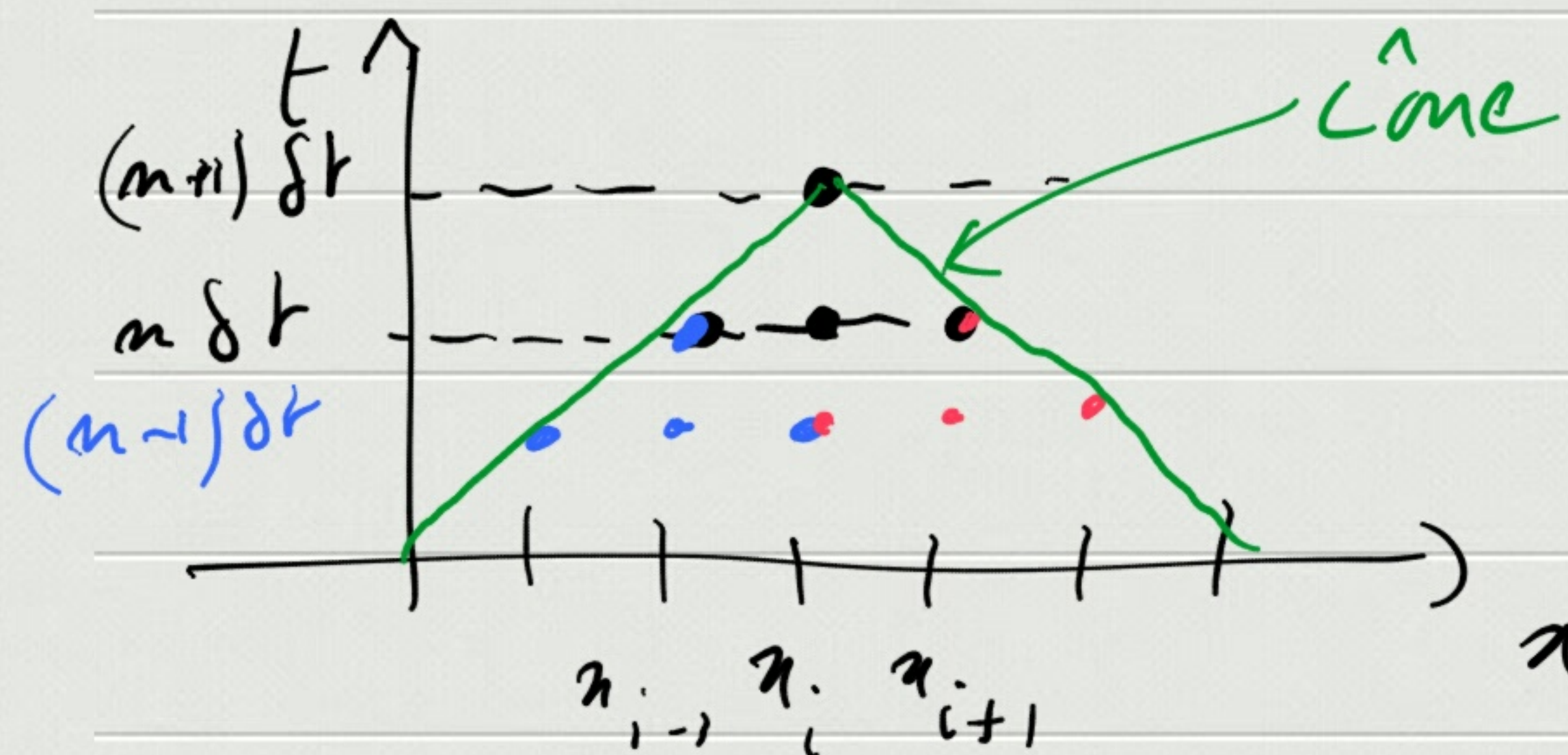
## TV Cône de dépendance numérique.

### 1) Définition.

On s'intéresse qu'à des schémas explicite et on veut comprendre comment l'information est propagée par le schéma.

Exple: Avec le schéma précédent:

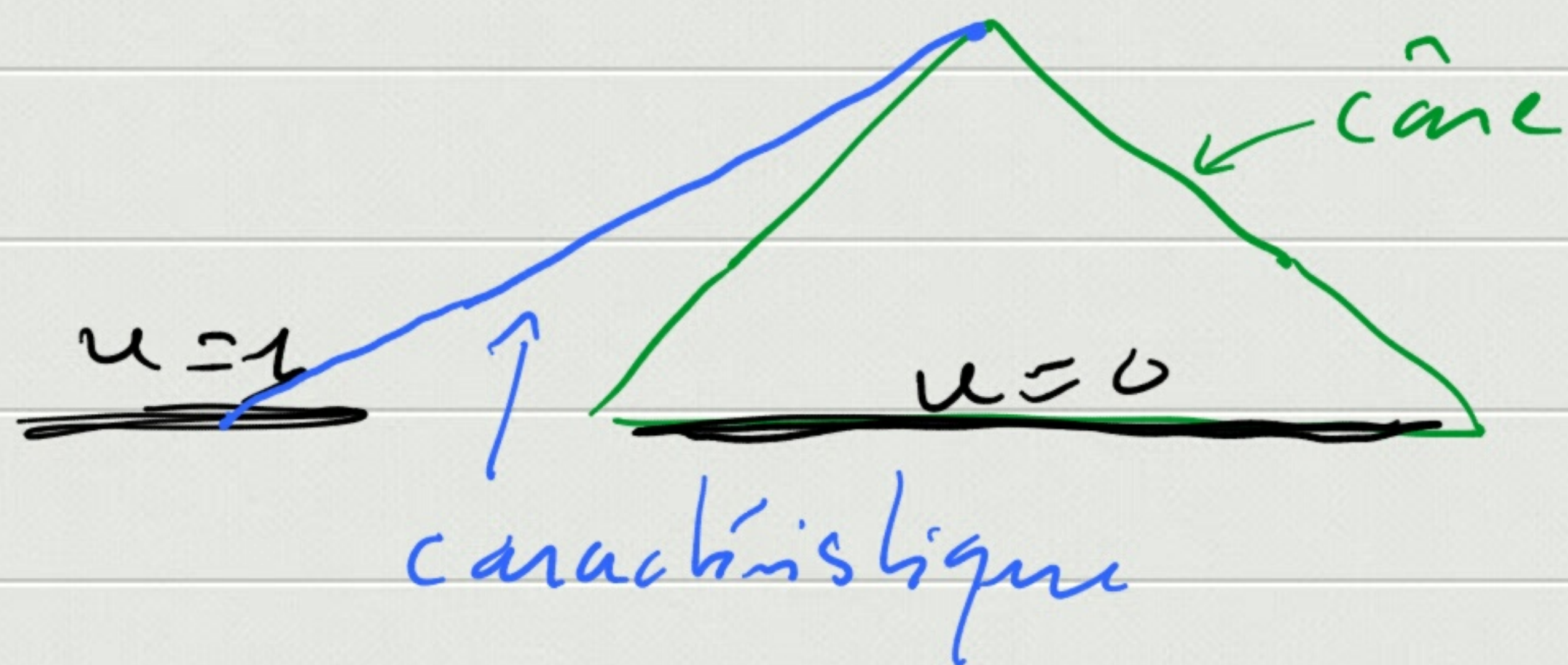
$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\delta t}{2h} u_{i-1}^n - \frac{\delta t}{2h} u_{i+1}^n$$



On appellera cône de dépendance numérique le cône de sommet  $(x_i, (n+1)\delta t)$  constitué des pts de grille qui influencent  $u_i^{n+1}$ .

Cette notion de cône de dépendance numérique est pertinente pour s'assurer que le cône contient la caractéristique passant par le sommet du cône.

Si non, on peut fabriquer un contre-exemple de convergence : Si  $\delta t/h$  est fixe, l'angle du cône est inchangé lorsque  $\delta t \rightarrow 0$   
 $h \rightarrow 0$



On devra choisir  $\delta t$ , suffisamment petit par rapport à  $h$  pour avoir l'angle du cône et assurer (condition nécessaire de convergence) que le cône contient la caractéristique.



Pour ce schéma, la C.N. est

et décentrage amont  $\frac{\delta t}{h} \leq \frac{1}{v}$  ← pente de la caractéristique

Mais cette condition n'est pas suffisante.

Pour le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} + v \frac{u_{i+2}^m - u_{i-2}^m}{4h} = 0$$

ici la caractéristique est dans le cône si

$$\frac{\delta t}{2h} \leq \frac{1}{v}$$

Exemple: décentré amont :

$$u_i^{m+1} = u_i^m \left(1 - \frac{\delta t v}{h}\right) + \frac{\delta t v}{h} u_{i-1}^m$$

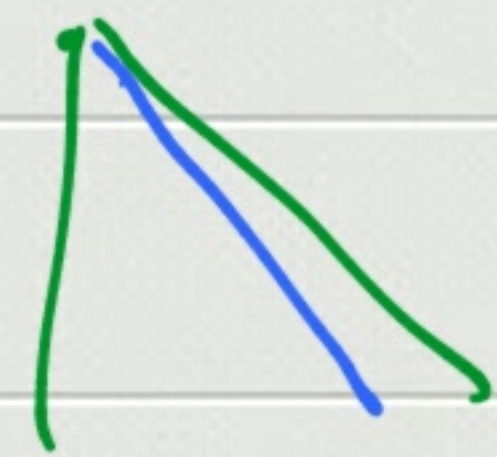
Si  $v > 0$

$$C.N. : \frac{\delta t v}{h} \leq 1$$

(caract. C cône)



Si  $v < 0$



$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} + v \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h} = 0 \quad \bullet \quad \frac{\delta t v}{h} u_{i+1}^m$$

$$C.N. : \frac{\delta t |v|}{h} \leq 1$$



## V Exemples de schémas.

• Lax-Friedrichs:

$$\frac{2u_i^{n+1} - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta t} + V \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0$$

• stabilité  $L^2$ ?

• consistance?  $\rightarrow$  approche  $\partial_t u + V \partial_x u = 0$ ??

Schéma

• Lax-Wendroff construit sur une discrétisation

centrée en espace de:

$$\partial_t u + V \partial_x u - \frac{(V^2 \delta t)}{2} \partial_{xx}^2 u = 0$$

Par les formules de Taylor ou D.L:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \delta t \underbrace{\partial_t u_i^n}_{-V \partial_x u_i^n} + \frac{\delta t^2}{2} \underbrace{\partial_{tt}^2 u_i^n}_{V^2 \partial_{xx}^2 u_i^n} + O(\delta t^3)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \delta t V \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + O(h^2) \right) + \frac{\delta t^2 V^2}{2} \left( \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + O(h^4) \right) + O(\delta t^3)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + V \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{\delta t V^2}{2} \frac{-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n}{h^2}$$

$\Rightarrow$  Lax-Wendroff  $\Rightarrow$  erreur  $O(h^2 + \delta t^3 + h^2 \delta t^2)$

Montrons la stabilité  $L^2$  de ce schéma:

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^n}{\delta t} + V \frac{e^{2i\pi kh} - e^{-2i\pi kh}}{2h} \hat{u}_k^n + \frac{\delta t V^2}{2h^2} \begin{pmatrix} -2i\pi kh & \\ & 2i\pi kh \end{pmatrix} \hat{u}_k^n = 0$$

Soit:  $\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n \left( 1 - \frac{i\delta t \sin(2\pi kh) V}{h} - \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c) \right)$  On pose  $a = \left( \frac{\delta t V}{h} \right)^2$

avec  $s = \sin(2\pi kh)$   $c = \cos(2\pi kh)$

$$\hat{u}_k^{n+1} = A_k \hat{u}_k^n \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad |A_k| \leq 1?$$

$$A_k = 1 + \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c) + i \left( -\frac{\delta t V s}{h} \right)$$

$$|A_k|^2 = \left( 1 + \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c) \right)^2 + \left( \frac{\delta t V s}{h} \right)^2$$

$$|A_k|^2 = 1 + \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c)^2$$

$$- 2 \frac{\delta t^2 V^2}{h^2} (2-2c) + \frac{\delta t^2 V^2 s^2}{h^2}$$

$$(1-c)^2 = 1 + c^2 - 2c$$

$$|A_k|^2 = 1 - a(1-c) (-4a(1-c) + 3 - c)$$

$$|A_k| \leq 1 \Leftrightarrow -4a(1-c) + 3 - c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{3-c}{4(1-c)}$$

$$|A_k| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \leq \inf_{-1 \leq c \leq 1} \frac{3-c}{4(1-c)}$$

$$\frac{3-c}{4(1-c)} = \frac{2+1-c}{4(1-c)} = \frac{1}{2(1-c)} + \frac{1}{4}$$

$$a_{\min} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, Lax-Wendroff est stable sous

$$\text{la CFL } \boxed{\delta t \leq \frac{h}{V} \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

De plus Lax-Wendroff est d'ordre 2 en vérifiant les formules de Taylor pour la solution exacte injectée dans le schéma.

$$\frac{u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i)}{\delta t} + V \frac{u(t_n, x_{i+1}) - u(t_n, x_{i-1}))}{h^2} + \dots = E$$

$$\text{avec } \partial_t u + V \partial_x u = 0 \quad \forall (t, x)$$

$$\text{Par les D.L, on trouve } E = O\left(h^k + \frac{\delta t^2}{h \delta t}\right)$$

$$\text{Si } h \sim \delta t \text{ et si } E = O(h^2)$$

On parle de schéma d'ordre 2

en temps et en espace.

VI Exercice.

1) Montrer que le schéma sauti-mouton (leap-frog) est stable sous CFL à préciser pour l'eq  $\partial_t u + \partial_x u = 0$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2 \delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 h} = 0$$

(schéma explicite, centré

en temps et en espace, à 2 pas).

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^{n-1}}{2\delta t} + \frac{\hat{u}_k^n}{2h} \begin{pmatrix} 2i\pi kh & -2i\pi kh \\ e & -e \end{pmatrix} = 0$$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^{n-1} - \frac{\delta t}{h} \hat{u}_k^n (2i \sin 2\pi kh)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_k^{n+1} \\ \hat{u}_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^n \\ \hat{u}_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = -2i \frac{\delta t}{h} \sin(2\pi kh)$$

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix} \hat{u}_k^{n+1} \\ \hat{u}_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^n \\ \hat{u}_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Il suffit que la matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ait un rayon spectral  $\leq 1$  pour

que la suite  $(u^n)$  soit bornée  
 $n \in \mathbb{N}$

dans  $L^2$ .

2) Schéma de Crank-Nicholson  
 pour le transport

$$\text{Eq: } \partial_t u + V \cdot \nabla u = 0$$

$$V(t, x) \in \mathbb{R}^d \\ x \in \mathbb{R}^d.$$

On pose en Fourier :

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x)$$

$$\partial_t \hat{u} + \int_{\mathbb{R}^d} (V \cdot \nabla u) = 0$$

si  $V = V(t)$  ind de  $x$

$$\partial_t \hat{u} + iV \cdot \xi \hat{u} = 0$$

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(0, \xi) e^{-iV \cdot \xi t}$$

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|\hat{u}(0, \cdot)\|_{L^2}$$

On peut faire des calculs similaires par l'estimateur d'énergie :

$$\partial_t u + V \cdot \nabla u = 0$$

$$\times u \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} :$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \frac{u^2}{2} dx + \int_{\mathbb{R}^d} V \cdot \nabla u u dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div} V u^2 dx$$

$$- \int_{\mathbb{R}^d} V \cdot \nabla u u dx$$

Si  $\boxed{\operatorname{div} V = 0}$  alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} V \cdot \nabla u u dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div} V u^2 dx = 0$$

$$\text{D'où } \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx = 0$$

Soit le schéma de C.N.:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + V \cdot \nabla \frac{u^n + u^{n+1}}{2} = 0$$

On multiplie par  $\underbrace{u^n + u^{n+1}}_{u^\#}$  et on intègre :

$$\frac{1}{\delta t} \int_{\mathbb{R}^d} |u^{n+1}|^2 - |u^n|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} V \cdot \nabla u^\# u^\# = 0$$

$= -\frac{1}{2}$  idem si  $\text{div} V = 0$   
 $\Rightarrow = 0$

$$\text{D'où } \|u^{n+1}\|_{L^2} = \|u^n\|_{L^2}.$$

On pourra utiliser ce schéma par exemple lorsque la diffusion et le transport apparaissent simultanément.

$$\partial_t u - d \Delta u + V \cdot \nabla u = 0.$$

NRJ:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |u|^2 dx + d \int |\nabla u|^2 dx = \int \text{div} V u^2$$