Equations différentielles - M61 2019

Contrôle continu du 01 mars - Durée 3h
Documents interdits.

1. (Question de cours) Soit le système d'EDO linéaire suivant à coefficients constants, $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

   (a) Donner l'expression de la résolvante de ce système.
   Dans le cas des systèmes linéaires à coefficient constant, la résolvante $R(t,s)$ s'écrit

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}.$$

   (b) Donner l'expression de la solution (Formule de Duhamel).
   La solution de l'EDO s'écrit (Formule de Duhamel) :

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds.$$

   (c) Application : Résoudre $\begin{cases} u'(t) = -u(t) + v(t) \\ v'(t) = v(t) + t \\ u(0) = 1,\ v(0) = 0 \end{cases}.$

   Le système proposé est ici découplé, on résoudra d'abord v puis u. La formule de Duhamel s'écrit pour l'équation v :

$$v(t) = \int_0^t e^{t-s} s\, ds = e^t \int_0^t e^{-s} s\, ds.$$

   Or, par intégration par partie,

$$\int_0^t e^{-s} s\, ds = \int_0^t e^{-s}\, ds - e^{-t} t = 1 - e^{-t} - e^{-t} t.$$

   Ainsi,

$$v(t) = e^t - 1 - t.$$

   On a alors,

$$u'(t) = -u(t) + e^t - 1 - t, \quad u(0) = 1.$$

   A nouveau, par la formule de Duhamel,

$$u(t) = e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^s(e^s - 1 - s)\, ds = e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^{2s} - e^s - e^s s\, ds$$

   Or,

$$\int_0^t e^{2s} - e^s - e^s s\, ds = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) - (e^t - 1) - \int_0^t e^s s\, ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2t} - e^t + 1 - e^t + e^t t.$$

   On obtient,

$$u(t) = e^{-t} + e^{-t}(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{2t} - 2e^t + e^t t) = \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t - 2 + t.$$

2. Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = \sin(t)x^3(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

   (a) Cette EDO posède-t-elle une unique solution maximale (I, x) ?
   La fonction f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par
   $$f(t, x) = \sin(t)x^3,$$
   est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ des deux arguments en tant que produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ d'une variable. Le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique donc et il existe une unique solution maximale (I, x) avec $0 \in I$.

   (b) Expliciter une/la solution maximale de ce problème.
   Un calcul formel permet d'écrire,
   $$\frac{x'(t)}{x^3(t)} = \sin(t).$$
   Par intégration entre 0 et t, on trouve formellement,
   $$-\frac{1}{2}(x^{-2}(t) - x_0^{-2}) = 1 - \cos t,$$
   Soit,
   $$x^{-2}(t) = x_0^{-2} - 2 + 2\cos t.$$
   Ainsi, si $x_0 = 0$, l'unique solution est trivialement la solution nulle $(\mathbb{R}, 0)$. Dans la suite, on supposera donc $x_0 \neq 0$.
   Si $x_0^2 < \frac{1}{4}$, alors $x_0^{-2} + 2(\cos t - 1) > 0$ et x est défini sur $\mathbb{R}$ par
   $$x(t) = \frac{sgn(x_0)}{\sqrt{x_0^{-2} - 2 + 2\cos t}}.$$
   On a alors identifiée l'unique solution maximale $(\mathbb{R}, x)$.
   Si $x_0^2 \geq \frac{1}{4}$, alors la solution est définie seulement sur un intervalle borné. On note $t^+ > 0$, le plus petit $t > 0$ tel que $x_0^{-2} + 2(\cos t - 1) = 0$. On a alors la solution maximale (I, x) avec $I =]-t^+, t^+[$

3. (a) Montrer que pour l'équation de Liouville,
   $$x'(t) = x^2(t) - t,$$
   les fonctions $\beta(t) = \sqrt{t}$ et $\alpha(t) = \sqrt{t + \lambda}$ $(\lambda > 1)$ définissent un anti-entonnoir sur $\mathbb{R}^+$ et que
   $$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) - \beta(t) = 0.$$
   On remarque que, en posant $f(t, x) = x^2 - t$, $f(t, \beta(t)) = 0 < \frac{1}{2\sqrt{t}} = \beta'(t)$ pour $t > 0$. Ainsi la fonction β est une barrière supérieure. De même, on constate que pour $\lambda > 1$, $f(t, \alpha(t)) = \lambda > \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \geq \frac{1}{2\sqrt{t+\lambda}} = \alpha'(t)$. Ainsi, la fonction α est une barrière inférieure.
   Comme la fonction α majore sur $\mathbb{R}^+$ la fonction β, ce couple de fonction constitue un anti-antonnoir pour l'équation de Liouville.
   On vérifie par ailleurs que, d'après l'inégalité des accroissements finis
   $$\sqrt{t + \lambda} - \sqrt{t} \leq \sup_{\tau > T} \frac{1}{2}\sqrt{\tau}\ \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{T}\ \lambda \forall t \geq T.$$
   On obtient ainsi que $\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) - \beta(t) = 0$, en faisant tendre T vers l'infini.

(b) Poursuivre l'analyse qualitative des solutions de l'équation de Liouville pour la donnée de Cauchy $t_0 = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$ à l'aide d'autres barrières.

D'après la question précédente, l'existence de l'anti-entonnoir assure qu'au moins une solution de donnée de Cauchy positive est piégée dans cet anti-entonnoir et assure la globalité sur $\mathbb{R}^+$. De plus, le comportement asymptotique en $+\infty$ est ainsi précisément décrit avec une croissance en racine de t.

En revanche le caractère globale de la solution pour toute donnée de Cauchy supérieure à la donnée de Cauchy de la solution piégée n'est pas du tout aquis. On peut construire la barrière supérieure sur $\mathbb{R}^+$ construite comme solution de $\gamma'(t) = \gamma^2(t)$, $\gamma(0) = x_0 > 0$. On remarque que cette solution explose en temps fini. On pense alors à introduire une barrière inférieure satisfaisant $\delta'(t) = \frac{1}{2}\delta^2(t)$, $\delta(0) = x_0 > 0$ dès lors que $\frac{1}{2}\delta^2(t) - t > 0$. Cette propriété sera vérifiée pour x_0 suffisamment grand (faire le calcul de $\delta(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \frac{1}{2}t}$ et identifier x_0 pour que $\frac{1}{2}\delta^2(t) > t$).

L'étude qualitative sur $\mathbb{R}^-$ est beaucoup plus simple avec, sur $\mathbb{R}^-$, une barrière supérieure solution de $\delta'(t) = -t$ avec $\delta(0) = x_0$ et une barrière inférieure solution de $\gamma'(t) = \gamma^2(t)$, $\gamma(0) = x_0$. Ces deux barrières se calculent explicitement et sont définies sur $\mathbb{R}^-$, ce qui assure le caractère globale de la solution sur $\mathbb{R}^-$.

(c) Etudier qualitativement la solution pour $x_0 \in \mathbb{R}^{-\star}$. On a vu que la fonction β constitue une barrière supérieure sur $\mathbb{R}^+$ pour les données de Cauchy négatives. On construit une barrière inférieure sur $\mathbb{R}^+$ en résolvant $\delta'(t) = -t$ avec $\delta(0) = x_0$ puisqu'un carré est toujours positif($x^2(t)$). Ainsi la solution est globale sur $\mathbb{R}^+$. Sur $\mathbb{R}^-$, l'analyse qualitative est la même pour $x_0 \leq 0$ que pour $x0 \geq 0$.

4. En construisant une fonction de Liapounov de la forme $V(x, y) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2}$, étudier les solutions pour t positif ainsi que la stabilité de $(0, 0)$ pour l'EDO :

$$\begin{cases} x'(t) = -x^3(t) + x(t)y^2(t) \\ y'(t) = -2x^2(t)y(t) - y^3(t) \end{cases} .$$

Compte tenu de l'expression polynômiale du second membre, le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique et il existe une unique solution maximale. Nous allons montrer qu'elle est globale sur $\mathbb{R}^+$ en construisant une fonction de Lyapunov.

On choisit $a = 2$ et $b = 1$, ainsi en sommant 2 fois la première équation fois $x(t)$ à 1 fois la deuxième équation fois $y(t)$, on a

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = -2x^4(t) - y^4(t) \leq 0.$$

Ainsi la fonction $t \to V(x(t), y(t))$ est décroissante positive donc bornée. Donc la solution est bornée pour tout temps positif donc global sur $\mathbb{R}^+$. De plus, le point stationnaire $(0, 0)$ est stable.

5. On rappelle que $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ pour a, b dans $\mathbb{R}^+$ et p, q dans $\mathbb{R}^{+\star}$ conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). On pourra l'appliquer pour $p = q = 2$ si on s'y prend bien.

(a) Etudier l'existence et l'unicité des solutions maximales de l'EDO :

$$\begin{cases} x'(t) = -x^3(t) + x(t)y^2(t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}x^2(t)y(t) - y^3(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R},\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Compte tenu de l'expression polynômiale du second membre, le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique et il existe une unique solution maximale.

(b) Etudier le comportement de la solution en $+\infty$.

On calcule $2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t)$, on obtient,

$$(x^2(t)+y^2(t))' = -2x^4(t)+3x^2(t)y^2(t)-2y^4(t) \leq (-2+\frac{3}{2})x^4(t)+(-2+\frac{3}{2})y^4(t) = -\frac{1}{2}(x^4(t)+y^4(t)).$$

On conclue alors de la même manière qu'à l'exercice précédent.

6. Etudier la stabilité des solutions stationnaires de

$$\begin{cases} x'(t) = -x^2(t) - y^2(t) + 25 \\ y'(t) = 12 - x(t)y(t) \end{cases}.$$

L'expression du second membre est une fonction polynômiale en x, y, le théormème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc et il existe une unique solution maximale pour chaque donnée de Cauchy. Pour les données de Cauchy telles que

$$\begin{cases} 25 = x_0^2 - y_0^2 \\ 12 = x_0 y_0, \end{cases}$$

la solution est globale et stationnaire : $(\mathbb{R}, (x_0, y_0))$.
De telles données de Cauchy sont l'intersection du cercle centré en 0 et de rayon 5 et de l'hyperbole $y = \frac{12}{x}$. On obtient alors 4 points : $(3,4)$, $(4,3)$, $(-3,-4)$ et$(-4,-3)$. On calcule le linéarisé du système en ces points. On traitera le point générique (x_0, y_0). Le linéarisé s'écrit

$$\begin{cases} x'(t) = -2x_0 x(t) - 2y_0 y(t) \\ y'(t) = -x_0 y(t) - x(t) y_0 \end{cases}.$$

On doit donc calculer les valeurs propres de

$$\begin{pmatrix} -2x_0 & -2y_0 \\ -y_0 & -x_0 \end{pmatrix}$$

On calcule et on trouve les valeurs propres $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{x_0^2 + 8y_0^2} - 3x_0)$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{x_0^2 + 8y_0^2} - 3x_0)$. Conclure...

7. On considère le système d'EDO (prédateur proie) paramétré par les réels strictement positifs, α_R, β_R, μ_R, n_L, et ℓ_R, ℓ_L.

$$\begin{cases} R'(t) = -\mu_R R(t) + \alpha_R R(t)L(t) - \ell_R R^2(t), \\ L'(t) = n_L L(t) - \ell_L L^2(t) - \beta_R R(t)L(t), \\ R(0) = R_0 > 0,\ L(0) = L_0 > 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que ce système admet une unique solution maximale $(I, (R, L))$.
Ce système d'EDO est autonome avec une nonlinéarité polynômiale qui assure l'existence d'une unique solution maximale $(I, (R, L))$ (d'après C-L) avec $0 \in I$.

(b) Montrer que la solution satisfait sur I, $R > 0$, $L > 0$.
On remarque que

$$R'(t) = R(t)(-\mu_R + \alpha_R L(t) - \ell_R R(t)) = R(t) g(L(t), R(t)),$$

avec g la fonction polynômiale décrite ci-dessus. g est donc *a fortiuri* continue. On a alors,

$$R(t) = R_0 e^{\int_0^t g(L(s),R(s))}\, ds.$$

Comme l'intégrale est définie pour tout t fini de I (car on intègre une fonction continue sur un borné), on en déduit que $R(t)$ est du signe R_0 soit positif strictement.
On a de même pour L.

(c) Montrer que la solution est bornée sur $I \cap \mathbb{R}^+$. En déduire la globalité sur $\mathbb{R}^+$.
On montre d'abord que L est borné en s'appuyant sur la positivité des solutions :

$$L'(t) \le n_L L(t) - \ell_L L^2(t).$$

Par un lemme de comparaison, on a $L(t) \leq M(t)$ avec

$$\begin{cases} M'(t) = n_L M(t) - \ell_L M^2(t), \\ M(0) = L_0 > 0. \end{cases}$$

On montre alors aisément que M est bornée sur $\mathbb{R}^+$ en identifiant les 2 solutions stationnaires qui jouent un rôle de barrière ainsi que la décroissance des solutions issues de $L_0 > \frac{n_L}{\ell_L}$ minorées par $\frac{n_L}{\ell_L}$.

(d) Trouver les points stationnaires de cette équation.
On note (R, L) un point stationnaire. On a

$$R(-\mu_R + \alpha_R L - \ell_R R) = 0, \quad L(n_L - \ell_L L - \beta_R R) = 0,$$

Les différents points stationnaires sont donc

$$(0,0), \quad (0, \frac{n_L}{\ell_L}), \quad (-\frac{mu_R}{\ell_R}, 0),$$

et la solution du système

$$\begin{cases} \alpha_R L - \ell_R R = \mu_R \\ -\ell_L L - \beta_R R = -n_L. \end{cases}$$

A noter que la troisième solution stationnaire proposée à une composante strictement négative qui ne peut être atteinte par des données initiales positives et ne sera donc pas étudiée. La positivité de L et R solution du système pour le quatrième point stationnaire dépend des coefficients du problème.

(e) Faire l'étude de stabilité de ces points stationnaires.
On calcule le linéarisé du système en un point stationnaire (R, L). La matrice du linéarisé s'écrit

$$\begin{pmatrix} -\mu_R + \alpha_R L - 2\ell_R R & \alpha_R R \\ -\beta_R L & n_L - 2\ell_L L - \beta_R R \end{pmatrix}$$

Pour le point stationnaire $(0,0)$ on a la matrice diagonale,

$$\begin{pmatrix} -\mu_R & 0 \\ 0 & n_L, \end{pmatrix}$$

qui entraîne l'instabilité de ce point stationnaire. Pour le point stationnaire $(0, L = \frac{n_L}{\ell_L})$ on a la matrice diagonale,

$$\begin{pmatrix} -\mu_R + \alpha_R L & 0 \\ -\beta_R L & n_L - 2\ell_L L, \end{pmatrix}$$

qui entraîne l'instabilité de ce point stationnaire si $\alpha_R L > \mu_R$ ou si $n_L > 2\ell_L L$. Dans le cas contraire, $(0, L = \frac{n_L}{\ell_L})$ est stable.
Reste le dernier point stationnaire, ..., la flemme.