

Feuille 03

Exercice 1.

Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$, on décide d'employer la formule de Newton-Cotes suivante:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{k=0}^3 \mu_k f\left(a + k \frac{b-a}{3}\right).$$

Calculer les coefficients μ_0, \dots, μ_3 sachant que la formule doit être exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Exercice 2.

Soit $h > 0$.

- Déterminer a, b et c pour que

$$\int_0^h \sqrt{x} f(x) dx = a f\left(\frac{h}{4}\right) + b f\left(\frac{h}{2}\right) + c f\left(\frac{3h}{4}\right)$$

lorsque f est un polynôme de degré le plus haut possible. Préciser le degré du polynôme.

- Appliquer cette formule pour le calcul approché de

$$\int_0^h \sqrt{x} \cos(\pi(1+x)) dx.$$

- Comparer le résultat précédent à la formule de quadrature de Simpson.

Exercice 3.

Soit la formule de quadrature $a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$ susceptible d'approcher

$$\int_0^\pi f(x) \sin(2x) dx.$$

- Déterminer a_1, a_2, x_1, x_2 de telle sorte que la formule de quadrature soit exacte lorsque f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
- Vérifier que la formule est exacte pour les polynômes f de degré 4.

Exercice 4.

On veut calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^6} dx.$$

1. Choisir a tel que

$$\int_a^\infty \frac{1}{1+x^6} dx \leq 2.10^{-6}.$$

2. Pour calculer

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^6} dx,$$

on utilise la formule des trapèzes après découpage de l'intervalle $[0, a]$ en N intervalles de même longueur. Exprimer N , le nombre de points suffisants, en fonction de $\max |f''|$ pour assurer une erreur de quadrature inférieure à 2.10^{-6} .

Exercice 5.

On veut améliorer la précision d'un calcul de quadrature par la méthode de Romberg. L'exercice a pour but d'exposer cette méthode.

On suppose qu'un calcul approché de $I = \int_a^b f(x) dx$ est donné par $I(h)$ où $h = \frac{b-a}{n}$ est le pas de découpage de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles égaux. On suppose que $h \rightarrow I(h)$ est une fonction régulière. On a

$$I(h) = I(0) + hI'(0) + \frac{h^2}{2}I''(0) + \dots + \frac{h^n}{n!}I^{(n)}(0) + h^{n+1}\varepsilon(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

1. Ecrire la même formule de Taylor au point $\frac{h}{2}$. On suppose que $I'(0) \neq 0$, trouver une combinaison linéaire des deux formules de Taylor qui permette d'approcher $I(0)$ avec plus de précision.
2. On suppose que $I'(0) = 0$ et $I''(0) \neq 0$. Trouver une combinaison linéaire des deux formules de Taylor qui permette d'approcher $I(0)$ avec plus de précision.
3. On suppose f régulière. Montrer que la méthode des trapèzes assure que $I'(0) = 0$.
4. Construire un procédé itératif de construction de méthode de calcul approché de $I(0)$, basé sur la méthode des trapèzes, qui permette de trouver $I(0)$ avec la précision souhaitée.