Université du Sud Toulon Var 18 novembre 2014

Examen d'Analyse Numérique M33

Exercice 1.

(2.5 pt.) Construire le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,-2)$.

Exercice 2.

(2.5 pt.) Construire sans calcul (à vue) le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,7)$, $(6,8)$, $(7,9)$.

Exercice 3.

(2,5 pt.) Construire le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ $(4,4)$ en le cherchant sous la forme $p(x) = x + q(x)$ (calcul en une ligne!).

Exercice 4.

1. Ecrire la formule de quadrature de Gauss à un point sur l'intervalle $[-1,1]$ pour approcher
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx\,.$$
Préciser et justifier le point et le poids de cette formule de quadrature.
2. Ecrire la formule de quadrature de Gauss à deux points sur l'intervalle $[-1,1]$. Préciser et justifier les points et les poids de cette formule de quadrature.
3. En déduire par un changement de variable la formule de quadrature de Gauss à deux points pour approcher
$$\int_{a}^{b} f(x)dx\,. \tag{1}$$
4. On suppose que $|b-a|$ est destinée à être petit, donner un majorant de l'erreur entre la formule de quadrature précédente et l'intégrale (1).

Exercice 5.

Soit f une fonction $C^6(\mathbb{R})$ et soit l'EDO
$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale (I,u) avec $u \in C^7(I)$.
2. On suppose de plus que f est négative sur $]1,+\infty[$ et que f est positive sur $]-\infty,-1[$. Montrer que $I \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.
3. Ecrire le schéma d'Euler implicite pour cette EDO et montrer qu'il est d'ordre 1.
4. En remarquant que $f(u)u \leq 0$ pour $|u| > 1$, montrer que ce schéma est A-stable.
5. En se servant de la méthode de Newton, donner un algorithme de construction de u_{n+1} en fonction de u_n.