Université de Toulon 10 novembre 2014

Partiel d'Analyse Numérique, M33 (durée: 1 heure 30)

(Tout document interdit, calculatrice autorisée)

Exercice 1.

(2.5 pt.) Construire le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,-2)$.

Exercice 2.

(2.5 pt.) Construire sans calcul (à vue) le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,7)$, $(6,8)$, $(7,9)$.

Exercice 3.

(2,5 pt.) Construire le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ $(4,4)$ en le cherchant sous la forme $p(x) = x + q(x)$ (calcul en une ligne!).

Exercice 4.

(2 pt.) Donner l'expression d'un polynôme p de $\mathbb{P}_3$ tel que $p^{(k)}(1) = 3$, $k = 0,1,2,3$. Est-il unique dans $\mathbb{P}_3$? Soit f une fonction C^∞ tel que $f^{(k)}(1) = 3$. Quelle estimation de $f(x) - p(x)$ a-t-on?

Exercice 5.

(2 pt.) Donner la définition de la méthode de Newton pour la recherche du zéro d'une fonction.

Exercice 6.

Le but de cet exercice est de calculer la solution du problème $\frac{1}{2}\sin x - x + 1 = 0$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$

1. **(2 pt.)** Montrer que g admet un unique point fixe.
2. **(2 pt.)** Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 > 0.$$

   A l'aide des graphes de g et de l'identité sur $\mathbb{R}^{+*}$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.
3. **(1 pt.)** Montrer que g est contractante.
4. **(2 pt.)** Justifier mathématiquement la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. **(2 pt.)** Calculer l'ordre de convergence de la suite.