Université de Toulon 10 novembre 2014

Correction Partiel d'Analyse Numérique, M33 (durée: 1 heure 30)

(Tout document interdit, calculatrice autorisée)

Exercice 1.

(2.5 pt.) Construire le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,-2)$.
L'unique polynôme de $\mathbb{P}_3$ qui interpole ces points s'écrit

$$p(x) = 3l_0(x) + 2l_1(x) + 4l_2(x) - 2l_3(x),$$

où les l_i sont les polynômes élémentaires de Lagrange:

$$l_0(x) = -\tfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}, l_1(x) = \tfrac{x(x-2)(x-3)}{2}, l_2(x) = -\tfrac{x(x-1)(x-3)}{2}, l_3(x) = \tfrac{x(x-1)(x-2)}{6}.$$

Exercice 2.

(2.5 pt.) Construire sans calcul (à vue) le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$, $(5,7)$, $(6,8)$, $(7,9)$.
Ce polynôme s'écrit

$$p(x) = x + 2,$$

et c'est bien l'unique polynôme interpolant de $\mathbb{P}_7$.

Exercice 3.

(2,5 pt.) Construire le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ $(4,4)$ en le cherchant sous la forme $p(x) = x + q(x)$ (calcul en une ligne!).
Le polynôme q interpole les points $(0,2)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$ $(4,0)$. Ainsi, q élément de $\mathbb{P}_4$ s'écrit

$$q(x) = K(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

où K est une constante. $q(0) = 2$ donc $K = \frac{1}{12}$.

Exercice 4.

(2 pt.) Donner la définition de la méthode de Newton pour la recherche du zéro d'une fonction.
Cours...

Exercice 5.

(2 pt.) Donner l'expression d'un polynôme p de $\mathbb{P}_3$ tel que $p^{(k)}(1) = 3$, $k = 0,1,2,3$. Est-il unique dans $\mathbb{P}_3$? Soit f une fonction C^∞ tel que $f^{(k)}(1) = 3$. Quelle estimation de $f(x) - p(x)$ a-t-on?

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2}p''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}p'''(1)(x-1)^3.$$

Unicité: Si q est la différence de deux polynômes satisfaisants cette propriété alors $q^{(k)}(1) = 0$, $k = 0,1,2,3$. Donc

$$q(x) = (x-1)^4 r(x),$$

où r est un polynôme. Mais $q \in \mathbb{P}_3$ impose que $r = 0$.
L'estimation attendue de $f(x) - p(x)$ est une formule de Taylor, par exemple Taylor Lagrange.

Exercice 6.

Le but de cet exercice est de calculer la solution du problème $\frac{1}{2}\sin x - x + 1 = 0$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$

1. **(3 pt.)** Montrer que g admet un unique point fixe.
   Etude de h sur $\mathbb{R}^+$ définie par $h(x) = g(x) - x$:
   $h'(x) = \frac{1}{2}\cos x - 1$, la fonction cos étant comprise entre -1 et 1, on a $h' \leq -\frac{1}{2} < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Comme $h(0) = 1$ et $h(\pi) = -\pi + 1 < 0$, h possède un unique zéro entre 0 et π et aucun au delà de π (h est strictement décroissante). Donc g admet un unique point fixe, r, sur $\mathbb{R}^+$ et plus précisément sur $]0, \pi[$.

2. **(2 pt.)** Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 > 0.$$

   A l'aide des graphes de g et de l'identité sur $\mathbb{R}^{+*}$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.
   Faire un dessin...

3. **(1 pt.)** Montrer que g est contractante.
   $g'(x) = \frac{1}{2}\cos x$ donc $|g'|$ est bornée par $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc g est contractante.

4. **(3 pt.)** Justifier mathématiquement la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $|x_{n+1} - r| = |g(x_n) - g(r)| \leq \frac{1}{2}|x_n - r|$, par l'inégalité des accroissements finis. Ainsi en itèrant cette relation,

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{1}{2}|x_n - r| \leq (\frac{1}{2})^2|x_{n-1} - r| \leq (\frac{1}{2})^3|x_{n-2} - r| \leq \cdot \leq (\frac{1}{2})^{n+1}|x_0 - r|.$$

   Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r plus vite qu'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui tend vers zéro.

5. **(3 pt.)** Calculer l'ordre de convergence de la suite.
   On écrit le développement limité de g en r:

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = g'(r)(x_n - r) + \frac{1}{2}g''(r)(x_n - r)^2 + O((x_n - r)^3).$$

   On note que $g'(r) \neq 0$ car g' s'annule seulement en $\pi/2$ sur $]0, \pi[$ et $g(\pi/2) = 3/2 \neq \pi/2$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = g'(r) \neq 0.$$

   L'ordre de convergence est donc 1.