Université de Toulon 29 juin 2015

Examen d'Analyse Numérique M33

Exercice 1.

Construire le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,4)$, $(5,-2)$.

Exercice 2.

Construire sans calcul (à vue) le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(0,12)$, $(1,11)$, $(2,10)$, $(3,9)$, $(4,8)$, $(5,7)$, $(6,6)$, $(7,5)$.

Exercice 3.

Rappeler la définition du polynôme d'interpolation d'Hermite des points $(0,1,1)$ et $(1,0,2)$ et le construire.

Exercice 4.

1. Ecrire la formule de quadrature de Simpson (FQ de Newton-Cotes à 3 points) sur l'intervalle $[-1,1]$ pour approcher
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx\,.$$
2. En déduire par un changement de variable la formule de quadrature de Simpson pour approcher
$$\int_{a}^{b} f(x)dx\,. \tag{1}$$
3. On suppose f régulière et que $|b-a|$ est destinée à être petit, donner un majorant (fin) de l'erreur entre la formule de quadrature précédente et l'intégrale (1).

Exercice 5.

Le but de cet exercice est de calculer la solution du problème $\frac{1}{2}\cos x - x + \frac{1}{2} = 0$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}$.

1. Montrer que g admet un unique point fixe.
2. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,
$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 > 0.$$
3. Montrer que la suite est bien définie et positive.
4. A l'aide des graphes de g et de l'identité sur $\mathbb{R}^+$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.
5. Montrer que g est contractante.
6. Justifier rigoureusement la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Calculer l'ordre de convergence de la suite.